1. Rachunek zdań

Definicja. **Zdaniem logicznym** nazywamy zdanie oznajmujące, o którym możemy powiedzieć, że jest prawdziwe albo fałszywe.

Każdemu zdaniu przypisujemy jedną z dwóch wartości logicznych: 0, jeśli zdanie jest fałszywe, 1, jeśli zdanie jest prawdziwe. Za pomocą symboli $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \sim$ oznaczających odpowiednio i, lub, jeżeli…,to…, wtedy tylko wtedy, gdy, nieprawda, że ze zdań prostych tworzymy zdania złożone.

Zdanie

$p \wedge q$ nazywamy **koniunkcją** zdań p i q,

$p \vee q$ nazywamy **alternatywą** zdań p i q,

$p \Rightarrow q$ nazywamy **implikacją** zdań o poprzedniku p i następniku q,

$\sim p$ nazywamy **negacją** zdania p,

$p \Leftrightarrow q$ nazywamy **równoważnością** zdań p i q.

Wartości logiczne powyższych zdań przedstawione są w tabeli

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Definicja. Zdanie złożone, którego wartość logiczna jest zawsze równa 1 niezależnie od wartości logicznych zdań z których jest zbudowane nazywamy **prawem logicznym** lub **tautologią.**

Przykłady.

1)

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

$((p \wedge \sim p) \Rightarrow q) \in TAUT.$

2)

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

$((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \notin TAUT.$

Zasada indukcji zupełnej. Jeżeli $W(n)$ jest własnością określoną w zbiorze liczb naturalnych taką, że
1° $W(1)$ jest zdaniem prawdziwym
oraz
2° z tego, że dla każdej liczby naturalnej n, $W(n)$ jest zdaniem prawdziwym wynika, że $W(n+1)$ jest zdaniem prawdziwym,
to
$W(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej.

Przykład.

Stosując zasadę indukcji zupełnej udowodnimy, że $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ dla każdej liczby $n \in N$.

1° $n = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$,

2° Założenie indukcyjne: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ dla każdej liczby $n \in N$,

Teza: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$,

Dowód:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} == \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Zadania

1. Wykazać, że następujące zdania są prawami logicznymi (tautologiami):

a) $(\sim p) \vee p$ – prawo wyłączonego środka,

b) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ – prawo podwójnego przeczenia,

c) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ – prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy,

d) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji,

e) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ – prawo de Morgana,

f) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ – prawo de Morgana,

g) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$,

h) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ – prawo przemienności koniunkcji,

i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – prawo przemienności alternatywy,

j) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ – prawo łączności koniunkcji,

k) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ – prawo łączności alternatywy,

l) $p \Rightarrow (p \vee q)$ – prawo pochłaniania,

m) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ – prawo pochłaniania,

n) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ – prawo transpozycji,

o) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$ – prawo Dunsa Szkota,

p) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ – prawo symplifikacji,

q) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ – prawo przechodniości implikacji,

r) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ – prawo przechodniości równoważności.

2. Sprawdzić, czy następujące zdania są prawami logicznymi (tautologiami):

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$,

b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$,

c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{r}))$,

d) $((p \vee q) \Rightarrow (\mathrm{r} \wedge (\sim r))) \Rightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$,

e) $(((p \wedge q) \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow \sim q)$,

f) $\sim ((\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \Rightarrow q))$,

g) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q))$.

3. Stosując zasadę indukcji zupełnej udowodnić, że

a) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right)$,

b) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \right)$,

c) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \right)$,

d) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \right)$,

e) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1) \right)$,

f) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n(4n^2 - 1) \right)$,

g) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k^2 = -n(2n+1) \right)$,

h) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k^3 = -n^2 (4n+3) \right)$,

i) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \right)$,

j) $\forall n \in \mathrm{N} \forall a \in \mathrm{R} \forall b \in \mathrm{R} \left((a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)$ – dwumian Newtona,

k) $\forall n \in \mathrm{N} \left(2^{n-1} \leq n! \right)$,

l) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \right)$,

m) $\forall n \in \mathrm{N} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24} \right)$,

n) $\forall n \in \mathrm{N} \forall x \geq -1 \left((1+x)^n \geq 1 + nx \right)$ – nierówność Bernoulli'ego,

o) $\forall n \in \mathrm{N} \forall x \geq 0 \left((1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \right)$,

p) $\forall n \in \mathrm{N} \left(6 | (n^3 - n) \right)$,

q) $\forall n \in \mathrm{N} \left(11 | (2^{6n+1} + 3^{2n+2}) \right)$,

r) $\forall n \geq 2 \left(12 | (10^n - 4) \right)$,

s) $\forall n \in \mathrm{N}(11|(5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}))$,

t) $\forall n \in \mathrm{N}(9|(4^{n}+15n-1))$,

u) $\forall n \in \mathrm{N}(133|(11^{n+2}+12^{2n+1}))$,

w) zbiór n-elementowy ma $\binom{n}{k}$ podzbiorów k-elementowych $(0 \leq k \leq n)$,

v) zbiór n-elementowy ma 2^n podzbiorów.

Wskazówki i odpowiedzi:

2. a) nie jest, **b)** nie jest, **c)** jest, **d)** nie jest, **e)** jest, **f)** nie jest, **g)** jest.

2. Rachunek zbiorów

Zbiór jest pojęciem pierwotnym.

Definicja sumy zbiorów.

$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$.

Definicja iloczynu (części wspólnej) zbiorów.
$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$.

Definicja różnicy zbiorów.

$A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$.

Definicja dopełnienia zbioru.

$-A = \{x: x \notin A\}$.

Przykład.
Niech $A, B \subset R$ i $A = (-2,1)$ i $B = (0,3]$, wtedy

$A \cup B = (-2,3]$, $A \cap B = (0,1)$, $A \backslash B = (-2,0]$, $B \backslash A = [1,3]$, $-A = (-\infty - 2] \cup [1, +\infty)$, $-B = (-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$.

Zadania

1. Wyznaczyć i naszkicować na osi liczbowej lub w układzie współrzędnych zbiory $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A$, jeżeli

a) $A = \{x \in R: x^2 > 1\}$, $B = \{x \in R: x^2 < 4\}$,

b) $A = \{(x,y) \in R^2: y = |x|\}$, $B = \{(x,y) \in R^2: x = |y|\}$,

c) $A = \{(x,y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$, $B = \{(x,y) \in R^2: x + y < 2\}$.

2. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:

a) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$,

b) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$,

c) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$,

d) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) C (A \backslash C)$,

e) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$,

f) $-(A \cup B) = (-A \cap -B)$ – prawo de Morgana**,**

g) $-(A \cap B) = (-A \cup -B)$ – prawo de Morgana**.**

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $B = (-2,2)$, $A \cup B = (-\infty, +\infty)$,

$A \cap B = (-2, -1) \cup (1,2), A \backslash B = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty), B \backslash A = [-1,1]$,

b) $A \cup B = \{(x, y) \in R^2 : y = -x \vee (y = x \wedge x > 0)\}$,

$A \cap B = \{(x, y) \in R^2 : y = x \wedge x \geq 0\}, A \backslash B = \{(x, y) \in R^2 : y = -x \wedge x < 0\}$,

$B \backslash A = \{(x, y) \in R^2 : y = -x \wedge x > 0\}$,

c) $A \cup B = \left\{(x, y) \in R^2 : x + y < 2 \vee 2 - x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$,

$A \cap B = \{(x, y) \in R^2 : x^{\,2} + y^2 \leq 4 \wedge \mathrm{y} < 2 - x\}$,

$A \backslash B = \left\{(x, y) \in R^2 : 2 - x \ \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$,

$B \backslash A = \{(x, y) \in R^2 : y < 2 - x \wedge x^2 + y^2 \geq 4\}$.

3. Iloczyn (produkt) kartezjański. Relacje

Definicja. Iloczynem kartezjańskim niepustych zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b) takich, że $a \in A$ i $b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Przykład. $\{1,2\} \times \{0,1\} = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$.

Definicja. Relacją ρ określoną w iloczynie kartezjańskim $A \times B$ nazywamy dowolny podzbiór tego iloczynu.

Jeżeli $\rho \subset A \times A = A^2$, to mówimy, że ρ jest relacją określoną w zbiorze A.

Definicja. Relację $\rho \subset A^2$ nazywamy **relacją równoważności**, jeżeli

1) $\forall x \in A (x\rho x)$, ($\rho$ jest zwrotna),
2) $\forall x, y \in A (x\rho y \Rightarrow y\rho x)$, ($\rho$ jest symetryczna),
3) $\forall x, y, z \in A [(x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow (x\rho z)]$, ($\rho$ jest przechodnia).

Definicja. Klasą abstrakcji relacji $\rho \subset A^2$ wyznaczonej przez element $x \in A$ nazywamy zbiór wszystkich $y \in A$ takich, że $x\rho y$.

$$\|x\| = \{y \in A : x\rho y\}$$

Każda relacja równoważności $\rho \subset A^2$ ustala podział zbioru A na niepuste i rozłączne podzbiory, które są klasami abstrakcji tej relacji. Zbiór klas abstrakcji nazywamy **zbiorem ilorazowym**.

Przykład. Wykażemy, że relacja $\rho \subset \mathrm{Z}^2$ określona wzorem $a\rho b \Leftrightarrow \exists k \in Z(a - b = 4k)$ jest relacją równoważności i wyznaczymy klasy abstrakcji tej relacji.

1) $\forall a \in Z(a\rho a) -$ zwrotność

$a - a = 4 \cdot 0 \Rightarrow a\rho a$,

2) $\forall a, b \in Z(a\rho b \Rightarrow b\rho a)$ – symetryczność

$a\rho b \Leftrightarrow \exists k \in Z(a - b = 4k) \Rightarrow b - a = 4(-k) \Rightarrow \exists l = -k \in Z(b - a = 4l) \Rightarrow b\rho a,$

3) $\forall a, b, c \in Z[(a\rho b \wedge b\rho c) \Rightarrow (a\rho c)]$ – przechodniość

$a\rho b \Leftrightarrow \exists k \in Z(a - b = 4k),$

$b\rho c \Leftrightarrow \exists l \in Z(b - c = 4l),$

$a - c = (a - b) + (b - c) = 4(k + l) \Rightarrow a\rho c.$

Relacja ρ spełnia warunki 1) – 3), więc jest relacją równoważności. Wyznaczymy teraz klasy abstrakcji tej relacji.

$\|0\| = \{0, \pm 4, \pm 8, \dots\} = \{a \in Z: a = 4k \wedge k \in Z\},$

$\|1\| = \{\pm 1, \pm 5, \pm 9, \dots\} = \{a \in Z: a = 4k + 1 \wedge k \in Z\},$

$\|2\| = \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots\} = \{a \in Z: a = 4k + 2 \wedge k \in Z\},$

$\|3\| = \{\pm 3, \pm 7, \pm 11, \dots\} = \{a \in Z: a = 4k + 3 \wedge k \in Z\}.$

Relacja ρ ustala podział zbioru Z na cztery rozłączne podzbiory (klasy abstrakcji) tzn. $Z = \|0\| \cup \|1\| \cup \|2\| \cup \|3\|.$

Zadania

1. Niech $A = \{a, b, c\}$ oraz $B = \{a, c, d\}$. Wyznaczyć zbiory $A \times B, B \times A$.

Czy $A \times B = B \times A$?

2. Niech $X = \{x \in R: x^2 \leq 1\}$ oraz $Y = R$. Wyznaczyć zbiór $X \times Y$.

3. Niech $A = [-1,1]$ oraz $B = [-1,2\}$. Wyznaczyć zbiór $A \times B$.

4. W prostokątnym układzie współrzędnych narysować zbiory $N \times N = N^2, R \times R = R^2$.

5. Sprawdzić, czy dane relacje są relacjami równoważności, jeżeli tak wyznaczyć klasy abstrakcji danej relacji:

a) $X =$ zbiór wszystkich studentów danej grupy.
$x\rho y \Leftrightarrow x$ urodził się w tym samym miesiącu co y,

b)

a\b	1	2	3
1	⁕		
2		⁕	⁕
3		⁕	⁕

c)

a\b	1	2	3
1	⁕		⁕
2		⁕	⁕
3		⁕	⁕

Symbol ⁕ oznacza, że elementy a, b są ze sobą w relacji.

d) $\rho \subset \mathrm{Z}^2, k\rho l \Leftrightarrow k^2 = l^2,$

e) $\rho \subset \mathrm{R}^2, x\rho y \Leftrightarrow y = 2x$,

f) $\rho \subset \mathrm{Z}^2, a\rho b \Leftrightarrow \exists k \in Z(a - b = 2k)$,

g) $\rho \subset \mathrm{Z}^2, a\rho b \Leftrightarrow \exists k \in Z(a - b = 3k)$,

h) $\rho \subset \mathrm{N}^2, a\rho b \Leftrightarrow a|b($ tzn. $\exists k \in N(b = ka))$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. $A \times B = \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,c),(c,d)\}$,

$B \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,a),(d,b),(d,c)\}$, $A \times B \neq B \times A$.

2. $X \times Y = \{(x,y) \in R^2 : x \in [-1,1] \wedge y \in R\}$.

3. $A \times B = \{(x,y) \in R^2 : x \in [-1,1] \wedge y \in -1,2]\}$.

5. a) Jest relacją równoważności, $\|x\|$ = zbiór studentów, którzy urodzili się w tym samym miesiącu co student x, **b)** jest relacją równoważności, $\|1\| = \{1\}, \|2\| = \{2,3\}$, **c)** nie jest relacją równoważności, **d)** jest relacją równoważności, $\|k\| = \{k.-k\}$, **e)** nie jest relacją równoważności, **f)** jest relacją równoważności, $\|0\| = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$, $\|1\| = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$, **g)** jest relacją równoważności, $\|0\| = \{0, \pm 3, \pm 6, \dots\}$, $\|1\| = \{\pm 1, \pm 4, \pm 7, \dots\}$, $\|2\| = \{\pm 2, \pm 5, \pm 8, \dots\}$, **h)** nie jest relacją równoważności.

4. Funkcja. Podstawowe własności funkcji.

Definicja. Przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$ nazywamy **funkcją** przekształcającą zbiór X w zbiór Y i oznaczamy $f: X \to Y$.

Definicja. Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji f** i oznaczamy przez D_f lub D, a zbiór $\{y \in Y : \exists x \in X\ (y = f(x))\}$ nazywamy **zbiorem wartości (przeciwdziedziną) funkcji f** i oznaczamy przez D_f^* lub D^*.

Jeżeli $D^* = Y$, to mówimy, że funkcja f przekształca zbiór X **na** zbiór Y.

Przykład. $f(x) = \sqrt{x+1}$,

$f: [-1, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$D = [-1, +\infty)$, $D^* = [0, +\infty)$.

Funkcja określona wzorem $f(x) = \sqrt{x+1}$ przekształca przedział $[-1, +\infty)$ na przedział $[0, +\infty)$.

Definicja. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **różnowartościową w zbiorze** $A \subset X$, jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in A\big(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\big)$$

lub równoważnie

$$\forall x_1, x_2 \in A(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Jeżeli $A = X$, to funkcję f nazywamy **różnowartościową.**

Przykład.

Wykażemy, że funkcja określona wzorem $f(x) = 3x^2 + 1$ jest różnowartościowa w przedziale $[0, +\infty)$ i nie jest różnowartościowa w zbiorze R.

Jeżeli $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ i $f(x_1) = f(x_2)$, to $3x_1^2 + 1 = 3x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ funkcja f jest różnowartościowa w przedziale $[0, +\infty)$.

Zauważmy, że jeżeli $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$, to $f(x_1) = f(x_2) = 4$, co oznacza, że funkcja f nie jest różnowartościowa w zbiorze R.

Definicja. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy

a) **surjekcją**, jeżeli przekształca zbiór X **na** zbiór Y i oznaczamy $f: X \overset{na}{\rightarrow} Y$,
b) **injekcją,** jeżeli jest różnowartościowa i oznaczamy $f: X \xrightarrow{1 \to 1} Y$,
c) **bijekcją,** jeżeli jest surjekcją i injekcją.

Definicja. Funkcję $f: X \subset R \to Y \subset R$ nazywamy

a) **rosnącą**, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,
b) **malejącą**, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$,
c) **niemalejącą**, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$,
d) **nierosnącą**, jeżeli $\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

Funkcję spełniającą którykolwiek z warunków a) – d) nazywamy funkcją **monotoniczną**.

Przykład.

$$f(x) = [x] = k \overset{def}{\Leftrightarrow} k - 1 < x \leq k, k \in Z$$

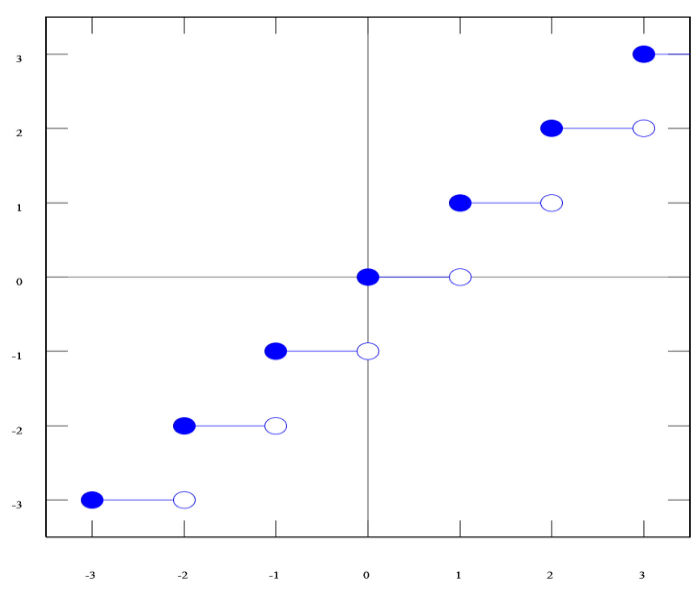
Funkcję określoną powyższym wzorem nazywamy funkcją entier i oznaczmy również przez E.

Jeżeli $x_1 \in [k, k+1) \wedge x_2 \in [k, k+1) \wedge k \in Z \wedge x_1 < x_2$, to $[x_1] = [x_2]$,

jeżeli $x_1 \in [k, k+1) \wedge x_2 \in [l, l+1) \wedge k, l \in Z \wedge k < l$, to $[x_1] < [x_2]$.

Zatem $\forall x_1, x_2 \in R (x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1] \leq [x_2])$, co oznacza, że funkcja entier jest niemalejąca.

Wykres funkcji entier



Definicja. Jeżeli zbiór X jest symetryczny względem punktu $x = 0$, to funkcję $f: X \subset R \to Y \subset R$ nazywamy

a) **parzystą** , jeżeli $\forall x \in X(f(-x) = f(x))$,
b) **nieparzystą**, jeżeli $\forall x \in X(f(-x) = -f(x))$.

Przykłady.

1) $f(x) = 3x^2 + 1$

$f(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1 = f(x)$,

$\forall x \in R(f(-x) = f(x)) \Rightarrow$ funkcja f jest parzysta.

2) $f(x) = x^3 - x$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$,

$\forall x \in R(f(-x) = -f(x)) \Rightarrow$ funkcja f jest nieparzysta.

Uwaga. Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi 0y, a wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Definicja. Funkcję $f: X \subset R \to Y \subset R$ nazywamy **okresową**, jeżeli istnieje liczba rzeczywista $T \neq 0$ taka, że $\forall x, x + T \in X(f(x + T) = f(x))$.

Liczbę T nazywamy **okresem** funkcji f, a najmniejszy dodatni okres, o ile istnieje, nazywamy **okresem podstawowym** (**głównym**).

Przykład.

$f(x) = [x] - x, x \in R$,

okresem funkcji f jest każda liczba całkowita, a okresem podstawowym jest liczba $T = 1$.

5. Wielomiany

Definicja. Wielomianem n-tego stopnia o współczynnikach rzeczywistych nazywamy funkcję postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in R, n \in N, a_n \neq 0$.

Przykład. $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ −wielomian 3-go stopnia.

Definicja. Liczbę rzeczywistą a nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, jeżeli $W(a) = 0$.

Definicja. Liczbę rzeczywistą a nazywamy **pierwiastkiem k-krotnym wielomianu** $W(x)$, jeżeli $W(x)$ dzieli się przez $(x - a)^k$ i nie dzieli się przez $(x - a)^{k+1}$.

Przykład. $W(x) = x^4 - x^2$
0 − pierwiastek dwukrotny,
$-1, 1$ − pierwiastki jednokrotne.

Twierdzenie Bézouta. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Twierdzenie. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$ jest równa $W(a)$. Jeżeli $W(x)=P(x)(x-a)+r$, to $r=W(a)$.

Twierdzenie. Jeżeli liczba całkowita k jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ o współczynnikach całkowitych, to $k|a_0$.

Twierdzenie. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ o współczynnikach całkowitych, to $p|a_0$ i $q|a_n$.

Przykład. $W(x)=3x^3+x^2+x-2,\ x=\frac{2}{3}$ jest pierwiastkiem $W(x)$.

Zadania

1. Rozwiązać równania:
a) $x^4-x^3-8x+8=0$, **b)** $6x^3-7x^2-x+2=0$, **c)** $(x^2-x)^4-(x^2-x)^2-12=0$,
d) $(2x^2-1)^2=x^4+x^2+3$.

2. Rozwiązać nierówności:
a) $x^3+2x^2-x-2<0$, **b)** $2x^3+5x^2-4x-3>0$,
c) $x^4<(2x^2-1)^2$, **d)** $(x^2-1)^4-2(x^2-1)^2-8\le 0$.

3.Wyznaczyć wartości a i b dla których wielomian $W(x)=(a+1)x^2+bx-6$ jest podzielny przez wielomian $P(x)=(x-1)(x-2)$.

4.Wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$, jeżeli $W(-1)=-1, W(2)=2$.

5. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $W(x)=x^4-5x^3+9x^2+ax+b$ jest podzielny przez trójmian $P(x)=x^2-x-2$. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

6. Dla jakich wartości parametrów p i q liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^4-5x^3+9x^2+px+q$?

7. Wyznaczyć współczynniki a, b i c równania $x^3+ax^2+bx+c=0$ tak, aby jego rozwiązaniami były tylko liczby a i b.

8. Wykazać, że niezależnie od parametru p wielomian $W(x)=x^3-(p+1)x^2+(p-3)x+3$ ma pierwiastek całkowity.

9. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4-x^3+x^2-x+1>0$.

10. Dla jakich wartości parametrów $m\ i\ p$ parabole określone równaniami $y=x^2+(m+2)x+m$ i $y=(-m-2)x^2+mx+m+p$ przecinają oś OX w tych samych dwóch punktach?

11. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$
a) ma dokładnie jeden pierwiastek? Dla wyznaczonych wartości m obliczyć ten pierwiastek.
b) ma dwa różne pierwiastki dodatnie?
c) ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

12. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $|x^2+3x|+1=k$ w zależności od parametru k.

13. Dla jakich wartości parametru p równanie $\frac{1}{p}x^4+(3-p)x^2+p^2=0$ ma cztery różne pierwiastki rzeczywiste?

14. Dla jakich wartości parametru m jeden z pierwiastków równania $(2m+1)x^2+\frac{8}{3}mx+\frac{3}{2}m=0$ jest sinusem, a drugi cosinusem tego samego kąta?

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $\{1,2\}$, **b)** $\left\{-\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$, **c)** $\{-1,2\}$, **d)** $\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$.
2. a) $(-\infty,-2)\cup(-1,1)$, **b)** $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$, **c)** $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup(1,+\infty)$, **d)** $[-1,2]$. **3.** $a=4, b=1$. **4.** $r(x)=ax^2+\left(\frac{1}{3}-a\right)x+\frac{4}{3}-2a,\ a\in R$.
5. $a=1,\ b=-14,\ x_1=-1,\ x_2=2$. **6.** $p=-7, q=-2$. **7.** $(a=b=c=0)\vee$ $(a=-1, b=1, c=1)\vee(\ a=\frac{3}{5}, b=-\frac{9}{5}, c=\frac{81}{125})$. **8.** $W(1)=0$.
10. $(m=-1\wedge p=2)\vee(m=p=-4)$. **11. a)** $\left(m=5, x=\frac{3}{20}\right)\vee\left(m=1, x=-\frac{1}{2}\right)\vee$ $\left(m=-\frac{10}{3}, x=\frac{4}{5}\right)$, **b)** $m\in\emptyset$, **c)** $m\in\left(\frac{10}{3},1\right)$. **12.** $(k<1)-0-$ pierwiastków, $\left(k=1\vee k>\frac{13}{4}\right)-2$ pierwiastki, $\left(k=\frac{13}{4}\right)-3$ pierwiastki, $\left(1<k<\frac{13}{4}\right)-4$ pierwiastki.
13. $p>9$. **14.** $m=\frac{-7+\sqrt{41}}{4}$.

6. Funkcje wymierne

Definicja. Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami.

Przykład. $f(x)=\frac{x^4-x^2+1}{x^2+3}$.

Szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej jest funkcja homograficzna.

Definicja. Funkcję wymierną postaci $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $ad\neq bc$, i $c\neq 0$ nazywamy **funkcją homograficzną.**

$D=R\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\},\quad D^*=R\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\}$.

Wykresem funkcji homograficznej jest **hiperbola** mająca asymptotę pionową daną równaniem $x=-\frac{d}{c}$, oraz asymptotę poziomą o równaniu $y=\frac{a}{c}$.
Jeżeli $a\neq 0$, to miejscem zerowym funkcji homograficznej jest punkt $x=-\frac{b}{a}$.

Gdy $a=0$ i $d=0$, wówczas funkcja homograficzna jest funkcją nieparzystą, a jej asymptotami są osie układu współrzędnych.

Zadania

1. Określić liczbę rozwiązań równania:
a) $\frac{p}{x-3}=2$, **b)** $\frac{x+2}{x+p}=2$, **c)** $\frac{x}{x-3}=p$. Podać odpowiednią interpretację geometryczną.

2. Rozwiązać równania:
a) $\left|\frac{x^2+6x+6}{x}\right|=1$, **b)** $\frac{|x-2|}{x^2-4x-2}+1=0$.

3. Rozwiązać nierówności:
a) $\frac{x^2-2}{x-3}<x$, **b)** $\left|\frac{4x+11}{x+1}\right|\geq 3$, **c)** $\frac{|x|}{x+4}\leq 3$.

4. Naszkicować wykres funkcji $f(x)=\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$, a następnie określić liczbę rozwiązań równania $f(x)=p$ w zależności od parametru p.

5. Naszkicować wykres funkcji $f(x)=\frac{|x-3|}{x+1}$, a następnie naszkicować wykres funkcji g, która każdej wartości parametru m przyporządkuje liczbę rozwiązań równania $f(x)=m$.
6. Dla jakich wartości parametru m równanie $x+\frac{m-8}{x-2}=4$ ma
a) dokładnie jedno rozwiązanie, **b)** dwa rozwiązania?

7. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x)=\frac{3x^2-4mx+5}{(m+2)x^4+6(m+2)x^2+m^2}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

8. Woda może wpływać do basenu z dwóch kranów. Za pomocą pierwszego kranu basen napełni się w czasie o 2 godziny dłuższym, za pomocą drugiego kranu w czasie o 4,5 godziny dłuższym niż przy napełnianiu basenu z obu kranów jednocześnie. W jakim czasie można napełnić basen używając tylko pierwszego, w jakim czasie tylko drugiego kranu?

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $(p=0)-0$ rozwiązań, $(p\neq 0)-1$ rozwiązanie, **b)** $(p=2)-0$ rozwiązań, $(p\neq 2)-1$ rozwiązanie, **c)** $(p=1)-0$ rozwiązań, **b)** $(p\neq 1)-1$ rozwiązanie.
2. a) $\{-6,-3,-2,-1\}$, **b)** $\{0,4\}$. **3. a)** $\left(\frac{2}{3},3\right)$, **b)** $(-\infty,-8)\cup[2,-1)\cup(-1,+\infty)$,
c) $x\in R\backslash\{-4\}$. **4.** $(p<0)-0-$ rozwiązań, $(p=0\vee \mathrm{p}=1)-1$ rozwiązanie, $(0<p<1\vee p>1)-2$ rozwiązania.

5. $g(m)=\begin{cases}0, & gdy\, m\in[-1,0)\\ 1, & gdy\, m\in(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup[1.+\infty).\\ 2, & gdy\, m\in(0,1)\end{cases}$

6. a) $m\in\{7,8\}$, **b)** $m\in(7,8)\cup(8,+\infty)$. **7.** $m\in[-2,0)\cup(0,+\infty)$. **8.** Za pomocą pierwszego kranu w ciągu 5 godzin, a za pomocą drugiego kranu w ciągu 7,5 godziny.

7. Funkcje wykładnicze

Definicja. Funkcją wykładniczą o podstawie a nazywamy funkcję postaci $f(x)=a^x$, gdzie $a>0$.

$$D = R,\quad D^* = \begin{cases} \{1\}, & gdy\ a = 1 \\ (0, +\infty), & gdy\ a \neq 1 \end{cases}.$$

Podstawowe własności funkcji wykładniczej:

1) $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$, gdy $a \neq 1 -$ jest różnowartościowa,
2) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, gdy $a > 1 -$ jest rosnąca,
3) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, gdy $0 < a < 1 -$ jest malejąca.

Własności 1) – 3) wykorzystuje się do rozwiązywania równań i nierówności.

Przykłady.

1) Rozwiążemy równanie wykładnicze $3^{x-1} = 1$,

$3^{x-1} = 3^0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

2) Rozwiążemy nierówność $3^{2x} \leq 9$,

$3^{2x} \leq 3^2 \Leftrightarrow 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$.

3) Rozwiążemy nierówność $\left(\frac{3}{4}\right)^{2|x|} > \frac{9}{16}$,

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2|x|} > \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 2|x| < 2 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Zadania

1. Rozwiązać równania:
a) $2^{x+1} = 4^x$, **b)** $7^{x-1} = 5^{1-x}$, **c)** $\left(5\sqrt{5}\right)^x = 0{,}04 \cdot 125^{x-2}$, **d)** $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$,
e) $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$, **f)** $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 = 0$, **g)** $\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x = 10$,
h) $\left(\sqrt{\sqrt{2} + 1}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)^x - 6 = 0$.

2. Dla jakich wartości parametru m równanie **a)** $6^x = m - 5$, **b**) $9^x - 2 \cdot 3^x + m = 0$,
c) $m4^x - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

3. Dla jakich wartości parametru m równanie **a)** $3^{|x|} = m$, **b**) $25^x - m \cdot 5^x - m + \frac{5}{4} = 0$ ma dwa różne rozwiązania?

4. Dla jakich wartości parametru m równanie $2^{x(x+1)} \cdot 8^{\frac{1}{3}m(m-1)} = \sqrt{2^{x^2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}(mx+m+1)}$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest niedodatnia?

5. Dla jakich wartości parametru k iloczyn różnych pierwiastków równania $5^{\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{125^{kx+k+1}} - \frac{\sqrt{25^{k(k-1)}}}{5^{-x(x+1)}} = 0$ ma wartość najmniejszą?

6. Dla jakich wartości parametru m równanie $4^{|x|} + 2(2m + 1)2^{|x|} + 4m^2 - 5 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek?

7. Rozwiązać nierówności:
a) $2^{3x-5} > 0$, **b)** $\left(\sqrt{6}\right)^{x+1} > \left(\sqrt[3]{6}\right)^x$, **c)** $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} - 9 \leq 0$, **d)** $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 < 0$.

8. Udowodnić, że
a) liczba $5+5^2+5^3+\cdots+5^{50}$ jest podzielna przez 6,
b) liczba $2+2^2+2^3+\cdots+2^{21}$ jest podzielna przez 7.

9. Porównać liczby
a) $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ i $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, **b)** $\sqrt{3}^{\sqrt{5}}$ i $\sqrt{5}^{\sqrt{3}}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $x=1$, **b)** $x=1$, **c)** $x=6$, **d)** $x=0 \vee x=2$, **e)** $x=1$, **f)** $x\in\emptyset$, **g)** $x=-2\vee x=2$, **h)** $x=-4\vee x=4$. **2. a)** $m\geq 5$, **b)** $m\in(-\infty,0]\cup\{1\}$, **c)** $m\in(-\infty,0]\cup\{4\}$.
3. a) $m>1$, **b)** $1<m<\frac{5}{4}$. **4.** $m\in(-\infty,-4)\cup\left(-4,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3},3\right)$. **5.** $k=\frac{5}{4}$.
6. Podstawić $2^{|x|}=t$ i rozważyć przypadki 1) $(\Delta=0\wedge t_0=1)$ i
2) $(\Delta>0\wedge t_1=1\wedge t_2<1)$. W przypadku 1) $m\in\emptyset$, w 2) $m=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **7. a)** $x\in R$,
b) $x>-3$, **c)** $x\leq 1$, **d)** $1<x<2$. **8. a)** $5+5^2+\cdots+5^{49}+5^{50}=5(1+5)+\cdots+5^{49}(1+5)$, **b)** $2+2^2+2^3+\cdots+2^{19}+2^{20}+2^{21}=2(1+2+2^2)+\cdots+2^{19}(1+2+2^2)$.

9. a) $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}<\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}<\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sqrt{2}^{\sqrt{6}}<3\Leftrightarrow 2^{\sqrt{6}}<9$.

Do porównywania liczb $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}}$ i $\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$ można wykorzystać własności funkcji $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, w tym celu należy najpierw obie liczby podnieść do potęgi $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

8. Funkcje logarytmiczne

Definicja. $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x,\ \ 0<a\neq 1,\ x>0.$

Własności logarytmu:

1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$,
2) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$,
3) $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Definicja. Funkcją logarytmiczną o podstawie a nazywamy funkcję postaci $f(x)=a^x$, gdzie $0<a\neq 1$.

$$D=(0,+\infty),\quad D^*=R.$$

Podstawowe własności funkcji logarytmicznej:

1) $x_1=x_2\Leftrightarrow\log_a x_1=\log_a x_2$ – jest różnowartościowa,
2) $x_1<x_2\Leftrightarrow\log_a x_1<\log_a x_2$, gdy $a>1$ – jest rosnąca,
3) $x_1<x_2\Leftrightarrow\log_a x_1>\log_a x_2$, gdy $0<a<1$ – jest malejąca.

Własności 1) – 3) wykorzystuje się do rozwiązywania równań i nierówności.

Przykłady.

1) Rozwiążemy równanie logarytmiczne $\log_2(4-x^2)=1$,

$D=\{x\in R: 4-x^2>0\}=(-2,2)$,

$\log_2(4-x^2)=\log_2 2\Leftrightarrow 4-x^2=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}\in D$.

2) Rozwiążemy nierówność $\log_2(4-x^2)<0$,

$D=\{x\in R: 4-x^2>0\}=(-2,2)$,

$\log_2(4-x^2)<\log_2 1$,

$4-x^2<1 \Leftrightarrow 3-x^2<0 \Leftrightarrow x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3}$,

Po uwzględnieniu dziedziny nierówności rozwiązaniem będzie zbiór $\left(-2,-\sqrt{3}\right)\cup(\sqrt{3},2)$.

3) Rozwiążemy nierówność $\log_{\frac{1}{3}}(x-4)\geq 2$,

$D=\{x\in R: x-4>0\}=(4,+\infty)$,

$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)\geq\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$,

$x-4\leq\frac{1}{9}\Leftrightarrow x\leq\frac{37}{9}$,

Po uwzględnieniu dziedziny nierówności rozwiązaniem będzie przedział $\left(4,\frac{37}{9}\right]$.

Zadania

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:
a) $f(x)=\log_2(x^2+4x+3)$, **b)** $f(x)=\log_x(3-x)$, **c)** $f(x)=\log(x^2+3x+4)$.

2. Czy funkcje $f\ i\ g$ są równe, jeżeli
a) $f(x)=\log_3(x-2)+\log_3(x-3)$, $g(x)=\log_3(x-2)(x-3)$,
b)$f(x)=\log_x(x-2)-\log_3(x-3)$, $g(x)=\frac{\log_3(x-2)}{\log_3(x-3)}$,
c) $f(x)=\log x^2$, $g(x)=2\log x$, **d)**$f(x)=\log x^2$, $g(x)=2\log|x|$.

3. Obliczyć $\log_{\mathrm{abc}}p$, jeżeli $\log_{\mathrm{a}}p=2$, $\log_{\mathrm{b}}p=3$, $\log_{\mathrm{c}}p=6$.

4. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 2$ zachodzi równość
$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\cdots\cdot\log_{n+1}n=\log_{n+1}2$.

5.Wykazać, że jeżeli $\mathrm{a},\mathrm{b}\in(0,1)$, to $\log_{\mathrm{a}}b+\log_{\mathrm{b}}a\geq 2$.

6. Rozwiązać równania:
a) $\log(x^2-4)=\log 3x$, **b)** $\log_{0,5}(x+2)=2\log_{0,5}(-x)$, **c)** $\log_2 x+\log_2(x+1)-1=0$,
d) $\log_9 x+\log_3 x=3$, **e)** $x^{\log x}=10$, **f)** $9^{\log_3(x-3)}=4$,
g) $x-\log 5=x\log 5+2\log 2-\log(1+2^x)$, **h)** $\log x+4\sqrt{\log x}=5$, **i)** $x^{1+\log x}=100x^2$,
j) $\log_8(3x-1)^3-\log_4(x+1)^4+\log_2(x-1)=0$.

7. Dla jakich wartości parametru m wielomian
$W(x)=x^3\log^2 m-3x^2\log m-6x-2\log m$ jest podzielny przez dwumian $x+1$?

8. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2-2x-\log_{\frac{1}{3}}m^2=0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma kwadratów jest mniejsza od 6?

9. Dla jakich wartości parametru k równanie $\frac{\log(-x)+\log k}{\log(3-x)} = 2$ ma dokładnie jeden pierwiastek? Obliczyć ten pierwiastek.

10. Dla jakich wartości parametru k równanie $\log_9 27 - \log_3(x+\sqrt{3}) = k$ ma pierwiastek należący do przedziału $(3\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$?

11. Dla jakich wartości parametru m równanie
$(2+m)\log_2^2(x+4) + 2(1-m)\log_2(x+4) + m - 2 = 0$ ma tylko ujemne pierwiastki?

12. Rozwiązać nierówności:
a) $\log_5 x > \log_5(2x-3)$, **b)** $\log_{0,25} x > -2$, **c)** $\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x+2) > 2$,
d) $\log^3 x - \log x^4 \le 0$, **e)** $\log_x(3-x) < 1$, **f)** $\log_2\left[\log_{0,5}(x-4)\right] \le 1$,
g) $\log_{|2x-3|} 5 > \log_{|2x-3|} 6$, **h)** $\log_x(2-x-x^2) < 1$, **i)** $\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1$,
j) $\log_2^2 8x - \log_2^2 4x + \log_2^2 2x \ge \log_2 64$, **k)** $1 - \log_x(5^x - 4) \ge x$, **l)** $\frac{2}{1+\log x} + \frac{1}{\log x} > 2$.

13. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f(x) = \log_3 6x - \log_3 x^2$.

14. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 2\log_x 2 + 3\log_y 2 = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases}$.

15. Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiór punktów (x, y) spełniających nierówność:
a) $\log_x y > 2$, **b)** $\log_x \log_y x > 0$, **c)** $\log_x y < \log_y x$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $D = (-3,-1)$, **b)** $D = (0,1) \cup (1,3)$, **c)** $D = R$. **2. a)** Nie, $g(x) = \log_3(x-2)(x-3)$, **b)** nie, **c)** nie, **d)** tak. **3.** Zamienić $\log_{abc} p$ na $\log_p$. **6. a)** $x = 4$, **b)** $x = -1$, **c)** $x = 1$, **d)** $x = 9$, **e)** $x = 0{,}1 \vee x = 10$, **f)** $x = 5$, **g)** $x = 2$, **h)** $x = 10$, **i)** $x = 0{,}1 \vee x = 100$, **j)** $x = 3$.
7. $m = 0{,}01 \vee m = 1000$. **8.** $m \in \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. **9.** $k = 12, x = -3$.
10. $\log_3 0{,}5 < k < \log_3 0{,}75$. **11.** $m \in (-\infty, -10) \cup [-2, \frac{5}{2}]$. **12**. **a)** $x \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$, **b)** $x \in (0,16)$, **c)** $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, **d)** $x \in \left(0, \frac{1}{100}\right] \cup [1,100]$, **e)** $x \in (0,1) \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right)$, **f)** $x \in [\frac{17}{4}, 5)$, **g)** $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, **h)** $x \in (0, \sqrt{3}-1)$, **i)** $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, **j)** $x \in \left(0, \frac{1}{16}\right] \cup [1, +\infty)$,
k) $x \in (\log_5 4, 1]$, **l)** $x \in \left(\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right) \cup (1,10)$. **13.** 1. **14.** $x = 2^{\frac{2}{5}}, y = 2^{-\frac{3}{5}}$.

9. Funkcje trygonometryczne

1) $y = \sin x$.

$D = R,\ D^* = [-1,1]$.

Jest funkcją okresową o okresie podstawowym równym 2π, jest funkcją nieparzystą.

Równanie podstawowe: $\sin x = a,\ a \in R$.

Jeżeli $|a| > 1$, to równanie nie ma rozwiązań, jeżeli $|a| \leq 1$, to równanie ma w zbiorze liczb rzeczywistych nieskończenie wiele rozwiązań, wówczas $\exists x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] (\sin x_0 = a)$ i wszystkie rozwiązania mają postać $x = x_0 + 2k\pi$ i $x = \pi - x_0 + 2k\pi, k \in Z$.

Przykład.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x_0 = -\frac{\pi}{6}$$

Rozwiązania równania $\sin x = -\frac{1}{2}$ są postaci $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in Z$.

2) $y = \cos x$.
$D = R,\ D^* = [-1,1]$.
Jest funkcją okresową o okresie podstawowym równym 2π, jest funkcją parzystą.

Równanie podstawowe: $\cos x = a,\ a \in R$.

Jeżeli $|a| > 1$, to równanie nie ma rozwiązań, jeżeli $|a| \leq 1$, to równanie ma w zbiorze liczb rzeczywistych nieskończenie wiele rozwiązań, wówczas $\exists x_0 \in [0, \pi] (\cos x_0 = a)$ i wszystkie rozwiązania mają postać $x = x_0 + 2k\pi$ i $x = -x_0 + 2k\pi,\ k \in Z$.

Przykład.

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4}$$

Rozwiązania równania $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ są postaci $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$.

3) $y = \operatorname{tg} x$.

$D = R - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\},\ D^* = R$.
Jest funkcją okresową o okresie podstawowym równym π, jest funkcją nieparzystą.

Równanie podstawowe: $\operatorname{tg} x = a, a \in R$.

Równanie ma w zbiorze liczb rzeczywistych nieskończenie wiele rozwiązań,

$\exists x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) (\operatorname{tg} x_0 = a)$ i wszystkie rozwiązania mają postać $x = x_0 + k\pi,\ k \in Z$.

Przykład.

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{3}$$

Rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ są postaci $x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$.

4) $y = \operatorname{ctg} x$.

$D = R - \{k\pi, k \in Z\}$, $D^* = R$.
Jest funkcją okresową o okresie podstawowym równym π, jest funkcją nieparzystą.

Równanie podstawowe: $\operatorname{ctg} x = a, a \in R$

Równanie ma w zbiorze liczb rzeczywistych nieskończenie wiele rozwiązań,

$\exists x_0 \in (0, \pi)(\operatorname{ctg} x_0 = a)$ i wszystkie rozwiązania mają postać $x = x_0 + k\pi,\ k \in Z$.

Przykład.

$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$$

$$x_0 = \frac{5\pi}{6}$$

Rozwiązania równania $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ są postaci $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$.

Zadania

1. Wykazać, że

a) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{ctg} 2x$, **b)** $\frac{1}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{\cos x - \sin x} = \frac{2\cos x}{\cos 2x}$, **c)** $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2\cos^2 x - 1$.

2. Rozwiązać równania:

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$, **b)** $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$, **c)** $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, **d)** $\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$,
e) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$, **f)** $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, **g)** $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = 4\sin 2x$,
h) $(\cos x - \sin x)^2 + \operatorname{tg} x = 2\sin^2 x$, **i)** $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$, **j)** $\cos 2x + \sin 2x = 1$,
k) $\sin 2x = \cos x + |\cos x|$, $x \in [0, 2\pi]$, **l)** $3^{\sin^2 x} = 3^{\cos^2 x} + 2$, **m)** $\cos(\pi \log x) + \sin(\pi \log x) - 1 = 0$, **n)** $\cos(x - 1) = x^2 - 2x + 2$, **o)** $2\cos x = \log y + \frac{1}{\log y}$,
p) $\operatorname{tg}^2(x + y) + \operatorname{ctg}^2(x + y) = -x^2 - 2x + 1$.

3. Dla jakich wartości parametru k równanie $\sin 3x = \frac{k^2 - 3k + 2}{k^2 - 2}$ ma rozwiązanie?

4. Dla jakich wartości parametru m równanie $m^2(1 - \sin x) - 4m + \sin x + 1 = 0$ ma rozwiązanie?

5. Dla jakich wartości parametru m równanie
$\cos 2x + \cos\left(2x + \frac{4}{3}\pi\right) = \log_{\frac{1}{3}}(3m + 5) - \log_{\frac{1}{3}}(10 - m)$ ma rozwiązanie?

6. Dla jakich wartości parametru m równanie
$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \log(m - 1) - \log(3 - m)$ ma rozwiązanie?

Wskazówki i odpowiedzi:

2. a) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$, **b)** $x = \frac{2}{9}\pi + \frac{1}{3}k\pi,\ k \in Z$, **c)** $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$, **d)** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$, **e)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = (2k + 1)\pi,\ k \in Z$, **f)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$,

$k \in Z$, **g)** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in Z$, **h)** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$, **i)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$, **j)** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in Z$, **k)** $x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi \vee x = \frac{3\pi}{2}$, **l)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in Z$, **m)** $x = 10^{2k} \vee x = 10^{2k+0,5}\ ,\ k \in Z$, **n)** x=1, **o)** $(x = 2k\pi \wedge y = 10) \vee (x = (2k+1)\pi \wedge y = 0,1),\ k \in Z$, **p)** $x = -1 \vee x = 1 + \frac{1}{4}\pi + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$. **3.** $k \in \left[0, \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$. **4.** $m \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$. **5.** $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{25}{6}\right]$. **6.** $m \in \left[\frac{103}{101}, \frac{301}{101}\right]$.

10. Funkcje złożone i funkcje odwrotne

Definicja. Jeżeli $f: X \subset R \to Y \subset R$ i

a) $A \subset X$, to zbiór $f(A) = \{y \in Y: \exists x \in A(y = f(x))\}$ nazywamy **obrazem zbioru *A***,
b) $B \subset Y$, to zbiór $f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$ nazywamy **przeciwobrazem zbioru *B***.

Przykłady.

1) Niech $f(x) = x^2 + 1$ i $A = [-1, 2]$. Wyznaczymy obraz zbioru A.

$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5.$

Stąd wynika, że $f(A) = [1, 5]$.

2) Niech $f(x) = x^2 + 1$ i $B = (2, 5]$. Wyznaczymy przeciwobraz zbioru B.

$2 < y \leq 5 \Rightarrow 2 < x^2 + 1 \leq 5 \Rightarrow 1 < x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x < 1 \vee 1 < x \leq 2.$

Stąd wynika, że $f^{-1}(B) = [-2, 1) \cup (1, 2]$.

Definicja. Jeżeli $D_f^* \cap D_g \neq \emptyset$, to funkcję $g \circ f: f^{-1}(D_f^* \cap D_g) \to D_g^*$ taką, która każdemu elementowi $x \in f^{-1}(D_f^* \cap D_g)$ przyporządkowuje element $y = g[f(x)] \in D_g^*$ nazywamy **złożeniem** (**superpozycją**) funkcji f z funkcją g.

Przykłady.

1) Niech $f(x) = 3x - 1$ i $g(x) = x^2$.

$D_f = R,\ D_f^* = R,\ D_g = R,\ D_g^* = [0, +\infty)$,

$D_f^* \cap D_g = R \neq \emptyset$, więc istnieje superpozycja $g \circ f$, ponieważ $f^{-1}\big(D_f^* \cap D_g\big) = R$, to $g \circ f: R \to [0, +\infty)$ i $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x - 1) = (3x - 1)^2$.

Zauważmy, że również $D_g^* \cap D_f = [0, +\infty) \neq \emptyset$, zatem istnieje superpozycja $f \circ g$, ponieważ $g^{-1}\big(D_g^* \cap D_f\big) = R$, to $f \circ g: R \to R$ i $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = 3x^2 - 1$.

2) Niech $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = -x^2$.

$D_f = (0, +\infty),\ D_f^* = R,\ D_g = R,\ D_g^* = (-\infty, 0],\ D_f^* \cap D_g = R \neq \emptyset$, więc istnieje superpozycja $g \circ f$, ponieważ $f^{-1}\big(D_f^* \cap D_g\big) = (0, +\infty)$, to $g \circ f: (0, +\infty) \to R$ i $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\ln x) = -\log_2^2 x$

Zauważmy, że również $D_g^* \cap D_f = \emptyset$, zatem nie istnieje superpozycja $f \circ g$.

Definicja. Jeżeli $f: X \to Y$ jest bijekcją, to przyporządkowanie każdemu elementowi $y \in Y$ dokładnie jednego elementu $x \in X$ takiego, że $y = f(x)$ nazywamy **funkcją odwrotną** do funkcji f i oznaczamy $f^{-1}: Y \to X$.

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Przykład. Wyznaczymy funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = x^3$.

Funkcja $f(x) = x^3$ jest różnowartościowa i przekształca zbiór R na zbiór R, jest więc bijekcją.

Z równania $y = x^3$ wyznaczamy x. Otrzymujemy $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Po zamianie zmiennych otrzymujemy $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Po zamianie zmiennych wykresy funkcji f i f^{-1} są symetryczne w względem prostej $y = x$.

Zadania

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $y = f(x)$, jeżeli
a) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$**, b)** $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \log(\log_3 x)$, **c)** $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$, **d)** $y = \sqrt{\log\cos x}$,
e) $y = \sqrt{\sin\frac{\pi}{x} - 1}$, **f)** $y = \frac{1}{\sqrt{\log\frac{2+x^2}{3x}}}$, **g)** $y = \frac{2^{-x}}{\sqrt{2-2^{\frac{1}{x}}}}$, **h)** $y = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}$.
2. Wyznaczyć zbiór wartości (przeciwdziedzinę) funkcji $y = f(x)$, jeżeli
a) $y = 2^{1-\sqrt{x}}$**, b)** $y = \frac{x}{1+x^2}$, **c)** $y = |x-1| + |x-2|$, **d)** $y = \sqrt{\log\cos x}$,
e) $y = \sqrt{x(2-x)}$, **f)** $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, **g)** $y = \frac{x^2}{1+x}$, **h)** $y = \sin x - \cos x$, **i)** $y = \sqrt{\frac{1}{2}\sin x\cos x}$.

3. Zbadać monotoniczność funkcji $y = f(x)$, jeżeli
a) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$**, b)** $y = \frac{x}{1+|x|}$, **c)** $y = x + |x-1|$, **d)** $y = \frac{1}{1+x}$, **e)** $y = 2^{-x} - 2^x$, **f)** $y = \frac{1}{\log x}$,
g) $y = [x]$.

4. Zbadać różnowartościowość funkcji $y = f(x)$ w zbiorze X, jeżeli
a) $y = \frac{1}{1+x}$, $X = R - \{-1\}$**, b)** $y = \frac{x}{1+x^2}$, 1) $X = [-1,1]$, 2) $X = R$, **c)** $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 1) $X = (-\infty, 0]$, 2) $X = R$, **d)** $y = 3^x - 3^{-x}$, $X = R$, **e)** $y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $X = R$.

5. Wykazać, że w zbiorze X istnieje funkcja odwrotna do funkcji $y = f(x)$. Wyznaczyć funkcję odwrotną oraz naszkicować wykres funkcji f i f^{-1}, jeżeli
a) $y = x^3$, $X = R$**, b)** $y = x|x|$, $X = R$, **c)** $y = \sqrt{1-x^2}$, 1) $X = [-1,0]$, 2) $X = [0,1]$,
d) $y = 3^x - 3^{-x}$, $X = R$, **e)** $y = \sqrt{x} - x$, 1) $X = [\frac{1}{4}, +\infty)$, 2) $X = [0, \frac{1}{4}]$,
f) $y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $X = R$.

6. Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji $y = f(x)$, jeżeli
a) $y = \frac{1-2x^2}{3x-x^3}$, **b)** $y = \frac{x^6-2x^2+1}{1-x^2}$, **c)** $y = \frac{1-x^2}{2+x}$, **d)** $y = \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$, **e)** $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$,
f) $y = x\sin x\cos x$.

7. Wyznaczyć okres podstawowy funkcji:
a) $y = \sin^2 x$, **b)** $y = 3\cos(2x-1)$, **c)** $y = x - [x]$, **d)** $y = \sin x - \mathrm{tg}x$,

e) $y = \sin 3x \cos 5x$, **f)** $y = \mathbf{3}\mathrm{tg}\frac{2}{3}(x-3)$, **g)** $f(x) = \mathrm{tg}\, x \mathrm{ctg} x$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. **a)** $(-1,1]$, **b)** $(1,+\infty)$, **c)** $[0,\pi^2] \cup [4\pi^2, 9\pi^2] \cup \ldots \cup [(2k)^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2] \cup \ldots = \bigcup_{k=0}^{\infty}[(2k)^2, (2k+1)^2\pi^2]$, **d)** $\{2k\pi, k \in Z\}$, **e)** $\left\{\frac{2}{1+4k}, k \in Z\right\}$, **f)** $(0,1) \cup (2,+\infty)$, **g)** $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$, **h)** $\bigcup_{k\in Z}\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \cdots \cup \left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \ldots$. **2. a)** $(0,2]$, **b)** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, **c)** $[1,+\infty)$, **d)** $\{0\}$, **e)** $[0,1]$, **f)** $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, **g)** $(-\infty,0) \cup (4,+\infty)$, **h)** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, **i)** $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. **1. a)** rosnąca, **b)** rosnąca, **c)** niemalejąca, **d)** nie jest monotoniczna, **e)** malejąca, **f)** nie jest monotoniczna, **g)** niemalejąca. **4. a)** jest różnowartościowa, **b)** 1) jest różnowartościowa, 2) nie jest różnowartościowa, **c)** jest różnowartościowa, 2) nie jest różnowartościowa, **d)** jest różnowartościowa, **e)** jest różnowartościowa. **5. a)** $y = \sqrt[3]{x}, x \in R$, **b)** $y = sgn(x)\sqrt{|x|}$, $x \in R$, **c)** 1) $y = -\sqrt{1-x^2}, x \in [0,1]$, 2) $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [0,1]$, **d)** $y = log_3 \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$, **e)** 1) $y = \frac{1}{2}\left(1 - 2x + \sqrt{1-4x}\right), x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, 2) $y = \frac{1}{2}\left(1 - 2x - \sqrt{1-4x}\right), x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, **f)** $y = \frac{1}{2}(10^x - 10^{-x})$.
6. a) nieparzysta, **b)** parzysta, **c)** nie jest parzysta i nie jest nieparzysta**, d)** nieparzysta, **e)** nieparzysta. **7. a)** π, **b)** π, **c)** 1, **d)** 2π, **e)** π, **f)** $\frac{3}{2}\pi$, **g)** $\frac{1}{2}\pi$.

11. Macierze. Działania na macierzach

$I = \{1,2,\ldots,n\}$, $J = \{1,2,\ldots,k\}$.

Definicja. Funkcję $f: I \times J \to R$ nazywamy **macierzą** o n wierszach i k kolumnach i wyrazach rzeczywistych .

$$f(i,j) = a_{ij}, \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le k, a_{ij} \in R$$

Macierz wygodnie jest przedstawiać w postaci tablicy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}.$$

Skrótowo macierz o n wierszach i k kolumnach oznaczmy $A = [a_{ij}]_{\substack{i\le n \\ j\le k}}$.

Definicja. Macierz o tej samej liczbie wierszy i kolumn nazywamy **macierzą kwadratową**.

Definicja. Stopniem macierzy kwadratowej nazywamy liczbę wierszy (kolumn) tej macierzy.

Przykłady. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ – macierz drugiego stopnia,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ – macierz trzeciego stopnia.

Definicja. Macierzą jednostkową n – tego stopnia nazywamy macierz kwadratową $J = [a_{ij}]_{i,j\le n}$ taką, w której $a_{ij} = \begin{cases} 1 \ dla\ i = j \\ 0 \ \ dla\ i \ne j \end{cases}$.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – macierz jednostkowa trzeciego stopnia.

Definicja. Macierz otrzymaną z macierzy A po zamianie wierszy na kolumny (lub odwrotnie) nazywamy **macierzą transponowaną** i oznaczamy symbolem A^T.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}.$$

Przykład. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Działania na macierzach:

1) Dodawanie i odejmowanie macierzy $A = [a_{ij}]_{\substack{i \le n \\ j \le k}}$, $B = [b_{ij}]_{\substack{i \le n \\ j \le k}}$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{\substack{i \le n \\ j \le k}}$$

Przykłady.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

2) Mnożenie macierzy $A = [a_{ij}]_{\substack{i \le n \\ j \le k}}$ przez liczbę $c \in R$

$$cA = [ca_{ij}]_{\substack{i \le n \\ j \le k}}$$

Przykład. $2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

3) Mnożenie macierzy przez macierz (iloczyn macierzowy)

Jeżeli $A = [a_{ij}]_{\substack{i \le n \\ j \le k}}$ i $B = [b_{ij}]_{\substack{i \le k \\ j \le p}}$, to $AB = [c_{ij}]_{\substack{i \le n \\ j \le p}}$, gdzie $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$.

Przykład.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadania

1. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Obliczyć $A+B$, $A-B$, $2A$, B^T.

2. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$. Obliczyć AB. Czy istnieje BA?

3. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

Obliczyć **a)** C^T, **b)** $(3A+B)CD$, **c)** $(2A-B)C$, d) D^2.

4. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.
Wyznaczyć macierz $AC+BC$.

5. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.
Wyznaczyć macierze AB i BC.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. $A+B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix}4 & 4 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $2A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$, $B^T=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

2. $AB=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$. BA nie istnieje. **3. a)** $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix}72 & 14\\ 34 & 10\\ 67 & 13\end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix}11 & 1\\ -7 & 5\\ 18 & 2\end{bmatrix}$, **d)** $\begin{bmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$.

4. $AC+BC=(A+B)C=\begin{bmatrix}13 & 8\\ 10 & 4\\ 9 & 7\end{bmatrix}$. **5.** $AB=\begin{bmatrix}3 & 9 & 2\\ 7 & 6 & 2\\ 3 & -1 & -5\\ 4 & -1 & 6\end{bmatrix}$, $BC=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ 0 & -2\\ 7 & 4\end{bmatrix}$.

12. Wyznacznik macierzy. Macierz odwrotna

Definicja wyznacznika macierzy

1) Wyznacznik macierzy kwadratowej 1-go stopnia

$$|a| = a.$$

2) Wyznacznik macierzy kwadratowej 2-go stopnia

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad-bc.$$

3) Wyznacznik macierzy kwadratowej 3-go stopnia (rozwinięcie Sarrusa)

$$\left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

4) Wyznacznik macierzy kwadratowej n-tego stopnia $n > 3$ (rozwinięcie Laplace'a)
a) rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in},$$

gdzie M_{ij} jest wyznacznikiem macierzy otrzymanej z macierzy A po wykreśleniu i-tego wiersza i j-tej kolumny.
b) rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny

$$detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj},$$

gdzie M_{ij} jest wyznacznikiem macierzy otrzymanej z macierzy A po wykreśleniu i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykłady. 1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot$ $(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot 6 + 0 - (-3) = -9.$

W przykładzie 1) zastosowano rozwinięcie Laplace'a względem 1-go wiersza.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1) = -6.$

W przykładzie 2) zastosowano rozwinięcie Laplace'a względem 1-ej kolumny.

Uwaga. Macierz z przykładu 2) nazywamy macierzą trójkątną, jej wyznacznik jest równy iloczynowi liczb na przekątnej.

Własności wyznacznika:
1) $\det(cA) = c^n detA.$
2) Jeżeli w wyznaczniku zamienimy miejscami dwa wiersze (dwie kolumny), to wyznacznik zmieni znak na przeciwny.
3) Jeżeli do dowolnego wiersza (dowolnej kolumny) dodamy inny wiersz (inną kolumnę) pomnożony (pomnożoną) przez liczbę, to wyznacznik nie zmieni się.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{w_1 \leftrightarrow w_3}{\cong} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{-2 \cdot w_1 + w_2}{\cong} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{w_2 + w_3 \\ \frac{1}{2} w_2 + w_4}}{\cong}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{-\frac{1}{2}w_3+w_4}{\cong} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \frac{3}{2} = -9.$$

Definicja. Jeżeli wyznacznik macierzy A jest równy zero (różny od zera), to macierz A nazywamy macierzą **osobliwą** (**nieosobliwą**).

Definicja. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to macierz B nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A jeżeli $AB = J$.

Twierdzenie. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to macierz odwrotna $A^{-1} = \frac{1}{detA} D^T$, gdzie D jest macierzą dopełnień algebraicznych tzn. $D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$, gdzie $d_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Przykład. Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$detA = -24 \neq 0 \Rightarrow$ istnieje A^{-1},

$d_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8$, $d_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $d_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$d_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $d_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$, $d_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$d_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $d_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $d_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6$,

$D = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ -2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$, $D^T = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} -8 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Zadania

1. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, **c)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, **d)** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć wyznaczniki

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Wykorzystując własności wyznaczników obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$**, e)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$**, f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$**.**

4. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$**, b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$**, c)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$**, d)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$**.**

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) 11, **b)** $\cos 2x$, **c)** -9, **d)** -1, **e)** -24. **2. a)** – 9, **b)** – 4. **3. a)** 3, **b)** 2, **c)** -2, **d)** -9, **e)** 4, **f)** -47. **4. a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$**, b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$**, c)** $\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$**, d)** $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$**.**

13. Układy n–równań liniowych o n niewiadomych. Wzory Cramera

Definicja. Układem dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych nazywamy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Oznaczmy $W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Twierdzenie. 1) Jeżeli $W \neq 0$, to układ równań (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie i nazywamy go wówczas **układem równań niezależnych** lub **układem oznaczonym.** Rozwiązanie układu jest postaci $x = \frac{W_x}{W}, y = \frac{W_y}{W}$.

2) Jeżeli $W = 0$ i $W_x = 0$ i $W_y = 0$, to układ równań (1) ma nieskończenie wiele rozwiązań i nazywamy go wówczas **układem równań zależnych** lub **układem nieoznaczonym.** Rozwiązaniem jest zbiór wszystkich par (x, y) spełniających jedno z równań układu.

3) Jeżeli $W = 0$ i $W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$, to układ równań (1) nie ma rozwiązań i nazywamy go wówczas **układem równań sprzecznych.**

Definicja. Układem n równań liniowych o n niewiadomych nazywamy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (2)$$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – macierz układu (2), $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – kolumna niewiadomych, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ – kolumna wyrazów wolnych.

$AX = B$ – postać macierzowa układu (2).
Oznaczmy przez W_{x_i} wyznacznik macierzy otrzymanej z macierzy A po zastąpieniu i – tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Twierdzenie. Jeżeli wyznacznik macierzy układu (2) jest różny od zera, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie i rozwiązanie to ma postać $x_i = \frac{W_{x_i}}{detA}$ dla $i = 1,2, \dots, n$.

Wzory $\begin{cases} x_1 = \frac{W_{x_1}}{detA} \\ \vdots \\ x_n = \frac{W_{x_n}}{detA} \end{cases}$ nazywamy **wzorami Cramera,** a układ **układem Cramera**.

Przykład. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ – układ trzech równań z trzema niewiadomymi.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ – macierz układu równań, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ – kolumna wyrazów wolnych,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ – kolumna niewiadomych,

$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$

$W_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ W_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ W_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{cases} x = \frac{W_x}{detA} = 1 \\ y = \frac{W_y}{detA} = 1 \\ z = \frac{W_z}{detA} = 0 \end{cases}$ – rozwiązanie układu równań.

Zadania

1. Rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$.

2. Dla jakich wartości parametrów a i b układ równań

a) $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 8x + ay = b \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} (a-3)x - 4y = b \\ -9x + (a+2)y = 9 \end{cases}$ jest oznaczony, nieoznaczony i sprzeczny?

3. Określ liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} 3x + my = 1 \\ 3x + 2y = k \end{cases}$ w zależności od parametrów m i k.

4. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $\begin{cases}4x-3y-7=0\\ mx-y-2=0\end{cases}$ jest para liczb ujemnych?

5. Dla jakich wartości parametru α rozwiązaniem układu równań $\begin{cases}x\sin\alpha - y\cos\alpha = 1\\ x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0\end{cases}$ jest punkt leżący na paraboli $y = 1 - x^2$?

6. Dla jakich wartości parametru m suma liczb x i y będących rozwiązaniem układu równań $\begin{cases}(1+\log m)\,x + (1-\log m)\,y = 1 - \log^2 m\\ 2x+3y = \log m\end{cases}$ jest dodatnia?

7. Stosując wzory Cramera rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases}x+y+z=0\\ 2x-y-z=-3,\\ x-y+z=0\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x+y+z=2\\ -x+2y+3z=2,\\ x-y-z=0\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}x+y+z=0\\ 2x-y-z=-3\\ 4x-5y+3z=-7\end{cases}$,

d) $\begin{cases}x+2y-z-t=-2\\ 2x-3y-z+2t=1\\ 4x-5y+2z+3t=5\\ x-y-z-t=-2\end{cases}$ **e)** $\begin{cases}x-y+z-t=0\\ -2x+z+2t=7\\ y+z+t=1\\ 3x+2y+z+3t=0\end{cases}$.

8. Rozwiązać układy równań z zadania 7 wykorzystując metodę eliminacji Gaussa.

9. Wykorzystując macierz odwrotną rozwiązać układy a), b), c) z zadania 7.

10. Rozwiązać równanie macierzowe

a) $AB - X = BA$, dla $A = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$,

b) $AX + B = AB$, dla $A = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$,

c) $0{,}5AB - 2X^T = BA$, dla $A = \begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ -5 & 0 & 4\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -2\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $x = \frac{7}{17}, y = -\frac{1}{17}$, **b)** $x = t, y = \frac{1}{2}(t-1), t \in R$, **c)** układ sprzeczny. **2. a)** Dla $(a \neq \pm 4 \wedge b \in R)$ układ jest oznaczony, dla $(a = -4 \wedge b = -2) \vee (a = 4 \wedge b = 2)$ układ jest nieoznaczony, dla $(a = -4 \wedge b \neq -2) \vee (a = 4 \wedge b \neq 2)$ układ jest sprzeczny, **b)** dla $(a \neq -6 \ \wedge b \in R) \vee (a \neq 7 \wedge b \in R)$ układ jest oznaczony, dla $(a = -6 \wedge b = 9) \vee (a = 7 \wedge b = -4)$ układ jest nieoznaczony, dla $(a = -6 \wedge b \neq 9) \vee (a = 7 \wedge b \neq -4)$ układ jest sprzeczny. **3.** Dla ($m \neq 2 \wedge k \in R$) układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, dla $(m = 2 \wedge k = 1)$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, dla $(m = 2 \wedge k \neq 1)$ układ nie ma rozwiązań. **4.** $m \in \left(-\infty, \frac{8}{7}\right)$. **5.** $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \alpha = (2k+1)\pi, k \epsilon Z$. **6.** $\frac{1}{10} < m < \frac{1}{\sqrt[5]{10}} \vee m > 1$. **7. a)** $x = -1, y = 0, z = 1$,

b) $x=1, y=0, z=1,$ **c)** $x=-1, y=\frac{3}{4}, z=\frac{1}{4},$ **d)** $x=0, y=0, z=1, t=1,$ **e)** $x=-1, y=-2, z=1, t=2.$ **10. a)** $X=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, **b)** $X=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, **c)** $X=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{57}{4} & -\frac{31}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & -\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & -3 & -\frac{19}{2}\end{bmatrix}$.

14. Układy n równań liniowych o k niewiadomych. Twierdzenie Kroneckera – Capelli'ego

Definicja. Układem n równań liniowych o k niewiadomych nazywamy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k=b_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nk}x_k=b_n\end{cases} \qquad (3)$$

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk}\end{bmatrix}$ – macierz układu (3), $X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\end{bmatrix}$ – kolumna niewiadomych, $B=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$ – kolumna wyrazów wolnych, $A|B=\left[\begin{array}{ccc|c}a_{11} & \cdots & a_{1k} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & b_n\end{array}\right]$ – macierz rozszerzona układu (3).

$AX=B$ – postać macierzowa układu (3).

Definicja. Macierz otrzymaną z macierzy A po wykreśleniu pewnej liczby wierszy lub kolumn nazywamy **podmacierzą macierzy** A.

Przykład.
$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}5 & 1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ – podmacierz macierzy A.

Definicja. Rzędem macierzy nazywamy stopień największej podmacierzy nieosobliwej tej macierzy.

Przykłady.

a) $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$, $detA=\begin{vmatrix}5 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=14\neq 0\Rightarrow$ rząd macierzy $A=3$,

b) $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ -5 & -1 & -3\end{bmatrix}$, $detA=\begin{vmatrix}5 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 4\\ -5 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$ i $\begin{vmatrix}5 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow$ rząd macierzy $A=2$,

c) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$, wszystkie podmacierze drugiego stopnia są osobliwe $\Rightarrow$ rząd macierzy $A=1$.

Twierdzenie Kroneckera – Capelli'ego. Układ (3) ma rozwiązanie wtedy tylko wtedy, gdy $rzA=rz\,A|B$.

Definicja. Układy równań nazywamy **równoważnymi**, jeżeli mają takie same rozwiązania.

Definicja. Macierze układów równoważnych nazywamy **macierzami równoważnymi.**

Twierdzenie. Rzędy macierzy równoważnych są równe.

$$A \leftrightarrow B \Rightarrow rzA = rzB.$$

Własności macierzy równoważnych:

1) jeżeli w danej macierzy zamienimy miejscami dwa wiersze (dwie kolumny), to otrzymana macierz będzie równoważna danej macierzy,
2) jeżeli dowolny wiersz danej macierzy pomnożymy przez liczbę różną od zera, to otrzymana macierz będzie równoważna danej macierzy,
3) jeżeli do dowolnego wiersza danej macierzy dodamy inny wiersz pomnożymy przez liczbę, to otrzymana macierz będzie równoważna danej macierzy.

Przykład.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{-5w_1+w_2 \\ -w_1+w_3}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -15 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \overset{3w_2+w_3}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & -46 \end{bmatrix},$$

macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ jest równoważna macierzy $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & -46 \end{bmatrix}$, ponieważ rząd macierzy B jest równy 3, to rząd macierzy A jest również równy 3.

Zadania

1. Wyznaczyć rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, **f)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2x + 2y + 3z = 3 \\ -x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x + 2y + 3z = 3 \\ -x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ 2x + 3y - 4z + 5t = 2 \\ 3x + 4y - 3z + 6t = 0 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 3y - 4z + 5t = 2 \\ 3x + 4y - 3z + 6t = 0 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 3 \\ x - 2y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$,

g) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ 4x - y + 3z = 11 \\ x - 4y - 3z = -1 \end{cases}$, **h)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) 3, **b)** 2, **c)** 2, **d)** 2, **e)** 3, **f)** 3. **2. a)** $x = -1, y = 0, z = 1$, **b)** $x = \frac{3}{4} + \frac{a}{4}$, $y = \frac{9}{4} - \frac{5}{4}a$, $z = a$, $a \in R$, **c)** układ sprzeczny, **d)** $x = 3$, $y = -\frac{24}{7} - \frac{9}{7}a$, $z = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7}a$, $t = a$, $a \in R$, **e)** układ sprzeczny, **f)** $x = -1, y = 0, z = 1$, **g)** $x = 3 - a$, $y = 1 - a$, $z = a, a \in R$, **h)** układ sprzeczny.

15. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny

Definicja. Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem arytmetycznym**, jeżeli różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in N$.

$$a_{n+1} - a_n = r - const.$$

Wyraz ogólny ciągu arytmetycznego o różnicy r ma postać $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

Definicja. Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem geometrycznym**, jeżeli iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in N$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - const.$$

Wyraz ogólny ciągu geometrycznego o ilorazie q ma postać $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.

Jeżeli $|q| < 1$, to istnieje **suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego** (szeregu geometrycznego) i wyraża się wzorem $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Zadania

1. Wyprowadzić wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

2. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = -2n + 5$.

a) Udowodnić, że jest to ciąg arytmetyczny,

b) Suma ilu początkowych wyrazów ciągu jest równa -140.

3. Liczby $\log_2(x-4), \log_2 2x, \log_2 x^2$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Obliczyć dwudziesty wyraz ciągu oraz sumę dwudziestu początkowych jego wyrazów.

4. Iloczyn pierwszego i szóstego wyrazu malejącego ciągu arytmetycznego o wyrazach całkowitych jest równy 100. Przy dzieleniu wyrazu drugiego przez wyraz szósty otrzymujemy 3 i resztę 2. Obliczyć, o ile jest mniejsza suma dwustu początkowych wyrazów o numerach parzystych od sumy dwustu wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.

5. Suma szóstego i szesnastego wyrazu ciągu arytmetycznego jest równa 5, a iloczyn wyrazu ósmego i dwunastego jest równy 3. Wyznaczyć wzór na wyraz ogólny tego ciągu.

6. Wykazać, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego zachodzi równość $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

7. Udowodnić, że jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach różnych od 0, to dla $n \geq 2$ zachodzi równość $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2} a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$.

8. Wyprowadzić wór na sumę n początkowych wyrazów oraz wzór na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

9. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1}$,

a) udowodnić, że jest to ciąg geometryczny,

b) obliczyć sumę 10 początkowych wyrazów tego ciągu.

10. Liczby dodatnie a, b, c są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego i ich suma jest równa 26 a suma ich odwrotności wynosi 0,7(2). Znaleźć te liczby.

11. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x + y + z = m + 4 \\ 2x - y + 2z = 2m + 2 \\ 3x + 2y - 3z = 1 - 2m \end{cases}$. Dla jakich wartości parametru m liczby x, y, z są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

12. Dla jakich wartości x, y liczby $x + y,\ x^2, y + 2$ są kolejnymi wyrazami zarówno ciągu geometrycznego jak i arytmetycznego?

13. Dane są dwa ciągi arytmetyczny i geometryczny. Każdy składa się z trzech wyrazów dodatnich. Pierwsze wyrazy tych ciągów są równe i ostatnie wyrazy też są równe. Suma wyrazów którego ciągu jest większa?

14. Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 6, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{16}{3}$. Dla jakich liczb naturalnych n spełniona jest nierówność $|S - S_n| < \frac{1}{96}$?

15. Rozwiązać nierówność $\frac{2x}{x^2-3} + \left(\frac{2x}{x^2-3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x^2-3}\right)^3 + \cdots \leq 0$.

16. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny o wyrazach różnych od zera i wyrazie ogólnym $a_n = \left(\log \frac{1}{x}\right)^n$. Znaleźć taką liczbę x, dla której suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest o 2 mniejsza od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych.

17. Funkcja $f(x)$ spełnia równanie $1 + f(x) + f^2(x) + \cdots = \frac{1}{2x^2-3x}$. Wyznaczyć dziedzinę i naszkicować wykres funkcji $f(x)$.

Wskazówki i odpowiedzi:

2. b) $S_{14} = -140$. **3.** $a_{20} = 40, S_{20} = 420$. **4.** Mniejsza o 600. **5.** $a_n = -\frac{13}{6}n + \frac{79}{3}$ lub $a_n = \frac{1}{2}n - 3$. **6.** Wsk. $3(S_{2n} - S_n) = 3(a_{n+1} + \cdots + a_{2n})$. **7.** Wsk. $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(a_1+(k-1)r)(a_1+kr)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{(a_1+(k-1)r)} - \frac{1}{(a_1+kr)}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$. **9. b)** $\frac{7}{6}(7^{10} - 1)$. **10**. $a = 2, b = 6, c = 18$ lub $a = 18, b = 6, c = 2$. **11.** $m = -7{,}8 \vee m = 3$. **12**. $x = 2, y = 2$. **13.** Jeżeli ciągi są stałe, to sumy są równe, jeżeli ciągi nie są stałe, to suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest nie mniejsza od sumy wyrazów ciągu geometrycznego. **14.** $n > 9$. **15**. $x \in (-\infty, -3) \cup [0,1)$. **16.** $x = 10^{\frac{2}{3}}$. **17.** $f(x) = -2x^2 + 3x - 1, D = \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

16. Nieskończone ciągi liczbowe

Definicja. Nieskończonym ciągiem liczb rzeczywistych nazywamy każdą funkcję $f: N \to R$.
$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$
a_n - wyraz ogólny ciągu, (a_n) - ciąg o wyrazie ogólnym a_n.

Definicja. Ciąg o wyrazie ogólnym a_n nazywamy

1) **rosnącym** $\Leftrightarrow \forall n \in N(a_{n+1} > a_n)$,
2) **niemalejącym** $\Leftrightarrow \forall n \in N(a_{n+1} \geq a_n)$,
3) **malejącym** $\Leftrightarrow \forall n \in N(a_{n+1} < a_n)$,
4) **nierosnącym** $\Leftrightarrow \forall n \in N(a_{n+1} \leq a_n)$.

Ciąg spełniający jeden z warunków 1) – 4) nazywamy **ciągiem monotonicznym**.

Przykład. $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$,

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{2n+5} - \frac{n+2}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+5)(2n+4)} < 0 \Rightarrow (a_n)$ jest malejący.

Definicja. Ciąg o wyrazie ogólnym a_n nazywamy

1) **ograniczonym z dołu**, jeżeli $\exists m \in R \forall n \in N(m \leq a_n)$,
2) **ograniczonym z góry**, jeżeli $\exists M \in R \forall n \in N(a_n \leq M)$,,
3) **ograniczonym**, jeżeli $\exists m, M \in R \forall n \in N(m \leq a_n \leq M)$.

Przykłady.

1) $a_n = \frac{n+2}{n+3}$,

$0 < \frac{n+2}{n+3} < 1 \Rightarrow$ ciąg $a_n = \frac{n+2}{n+3}$ jest ograniczony.

2) $a_n = \frac{n^2+1}{n+2}$,

$\frac{n^2+1}{n+2} > 0 \Rightarrow$ ciąg $a_n = \frac{n^2+1}{n+2}$ jest ograniczony z dołu,

wykażemy, że ciąg $a_n = \frac{n^2+1}{n+2}$ nie jest ograniczony z góry,

gdyby ciąg $a_n = \frac{n^2+1}{n+2}$ był ograniczony z góry, to istniała by liczba rzeczywista M taka, że $a_n = \frac{n^2+1}{n+2} \leq M$ dla każdej liczby $n \in N$, zatem prawdziwa byłaby nierówność

$\frac{n}{3} = \frac{n^2}{n+2n} \leq \frac{n^2+1}{n+2} \leq M$ dla każdej liczby $n \in N$, z której wynika, że $n \leq 3M$ dla każdej liczby $n \in N$, a to jest sprzeczne, bo zbiór liczb naturalnych nie jest ograniczony z góry.

Definicja. (granicy ciągu)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists k \in N \, \forall n > k \left(|a_n - a| < \varepsilon\right).$$

Przykład.

Udowodnimy z definicji, że ciąg $a_n = \frac{n+2}{n}$ ma granicę równą 1.

$|a_n - a| = \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$, zatem

$\forall \varepsilon > 0 \exists k = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] \forall n > k \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon$, co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$.

Definicja. Ciąg o wyrazie ogólnym a_n nazywamy **ciągiem zbieżnym**, jeżeli ma granicę.

Własności ciągów zbieżnych

Twierdzenie. Ciąg zbieżny nie może mieć dwóch różnych granic.

Twierdzenie. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie. Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Twierdzenie. (o trzech ciągach)

Jeżeli ciągi $(a_n),(b_n),(c_n)$ spełniają warunki:

1) $\exists k \in N \forall n > k (a_n \le b_n \le c_n)$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Twierdzenie. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, $b \ne 0$.

Twierdzenie. (Stolza)

Jeżeli (1) $b_n \to +\infty$,

(2) $\exists k \in N \forall n > k (b_{n+1} > b_n)$,

(3) istnieje granica ciągu $\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$.

Zadania

1. Zbadać ograniczoność ciągów:

a) $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$, **b)** $a_n = \frac{n-1}{2n-1}$, **c)** $a_n = n(1+(-1)^n)$, **d)** $a_n = n\sin\frac{1}{n}$,

e) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, **f)** $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, **g)** $a_n = \frac{[\sqrt{2}n^2]}{n^2+1}$.

2. Zbadać monotoniczność ciągów:

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, **b)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, **c)** $a_n = n+(-1)^n$, **d)** $a_n = 2n+(-1)^n$,

e) $a_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$, **f)** $a_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$, **g)** $a_n = n^2 - 2n - 5$, **h)** $a_n = -n^2 + 3n + 5$,
i) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. Stosując definicję granicy ciągu liczbowego udowodnić, że

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, **b)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$, **c)** $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2$,

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{2n+1} = 0$, **e)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = -1$.

4. Udowodnić zbieżność ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$, **b)** $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, **c)** $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, **d)** $a_n = \frac{n}{c^n}, c > 1$,
e) $a_n = \frac{n^k}{c^n}$, $c > 1, k \in N$, **f)** $a_n = \frac{k^n}{n!}, k \in N$, **g)** $a_n = \frac{c^n}{n!}, c \in R$.

5. Obliczyć granicę ciągu

a) $a_n = \frac{n^2-n+1}{3n^2-2n+1}$, **b)** $a_n = \frac{n^2-1}{(n^2-2n+5)^2}$, **c)** $a_n = \frac{n-\sqrt{n+1}}{5-2\sqrt{n}}$, **d)** $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

e) $a_n = \sqrt{4n^2+2n+1} - 2n$, **f)** $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{8n^3-n^2-2n}}$, **g)** $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - \sqrt{n^2+n+2} -$
$2n$, **h)** $a_n = \frac{(-2)^n+3^{n+1}}{(-2)^{n+1}+3^n}$, **i)** $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$, **j)** $a_n = \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}-1}$,
k) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}$, **l)** $a_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, **m)** $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$, **n)** $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$,
o) $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$, **p)** $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$, **q)** $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$, **r)** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} +$
$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, **s)** $a_n = \frac{n}{n^2+1}\sin(n!)$, **t)** $a_n = \frac{\ln(3^n+5^n)}{n}$, **u)** $a_n = \frac{[\sqrt{2}n]}{n+1}$, **v)** $a_1 = \sqrt{2}$,
$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, **w)** $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}}$, *x)* $a_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$, *y)* $x_n = \frac{n}{\log n!}$,

z) $a_n = \frac{1+3+\dots+(2n+1)}{1+5+\dots+(4n+1)}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $0 < a_n < 2$, **b)** $0 \le a_n < \frac{1}{2}$, **c)** $a_n \ge 0$, z góry nie jest ograniczony, **d)** $0 < a_n < 1$,
e) $\frac{1}{2} \le a_n < 1$, **f)** $1 \le a_n < 2$, **g)** $\frac{1}{2} \le a_n < \sqrt{2}$. **2. a)** rosnący, **b)** malejący, **c)** nie jest monotoniczny, **d)** niemalejący, **e)** rosnący, **f)** malejący, **g)** rosnący, **h)** nierosnący,

i) malejący. **4. c)** wsk. skorzystać z nierówności $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, $\lambda = 0{,}57721566490...$, $\lambda -$ stała Eulera-Mascheroniego, **d)** wsk. zastosować tw. Stolza, **f)** wsk. Dla $n > k$ prawdziwa jest nierówność $0 \le \frac{k^n}{n!} = \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k}{k+2} \cdot ... \cdot \frac{k}{n-1} \cdot \frac{k}{n} = \frac{k^{k+1}}{k!} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k}{k+2} \cdot ... \cdot \frac{k}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \le$ $\le \frac{k^{k+1}}{k!} \cdot \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{k+2}{k+2} \cdot ... \cdot \frac{n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k^{k+1}}{k!} \cdot \frac{1}{n}$. **5. a)** $\frac{1}{3}$, **b)** 0, **c)** $-\infty$, **d)** $\frac{1}{2}$, **e)** $\frac{1}{2}$, **f)** -12, **g)** $-\frac{1}{6}$, **h)** 3, **i)** $\frac{1}{2}$, **j)** 1, **k)** $\frac{4}{3}$, **l)** 1, **m)** $\frac{1}{e}$, **n)** $\frac{1}{e}$, **o)** e, **p)** 2, **q)** $\frac{3}{4}$, **r)** 1, **s) 0**, **t)** ln5, **u)** $\sqrt{2}$, **v)** 2, **w)** 0, ***x*)** 0, ***y*)** 0, ***z*)** $\frac{1}{2}$.

17. Granica funkcji

Definicja. Otoczeniem punktu x_0 nazywamy dowolny przedział otwarty zawierający punkt x_0.

Definicja. Sąsiedztwem punktu x_0 nazywamy zbiór $(a, x_0) \cup (x_0, b)$.

Definicja (granicy funkcji)

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, to

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall (x_n) \left(x_n \in D \wedge x_n \to x_0 \wedge x_n \neq x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right).$$

Twierdzenie. Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, to

1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b,$
2) $\lim_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = ab,$
3) $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{a}{b}, \ b \neq 0.$

Twierdzenie. (o trzech funkcjach)

Jeżeli $f(x) \le g(x) \le h(x)$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 i $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = g$, to $\lim_{x \to x_0} g(x) = g.$

Definicja (granicy lewostronnej)

Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale (a, x_0), to

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \Leftrightarrow \forall (x_n) \left(x_n \in D \wedge x_n \to x_0 \wedge x_n < x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right).$$

Definicja (granicy prawostronnej)

Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale (x_0, b), to

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \Leftrightarrow \forall (x_n) \left(x_n \in D \wedge x_n \to x_0 \wedge x_n > x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right).$$

Twierdzenie. Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą g wtedy i tylko wtedy, gdy granice jednostronne funkcji w punkcie x_0 f istnieją i są równe g.

Przykłady granic funkcji:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Zadania

1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x^{12}-1}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[10]{x}-1}{\sqrt[12]{x}-1}$, **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)^n-x^n}{x^{n-1}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x+4}-2}$, **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}$, **g)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, **h)** $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$,

i) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x$, **j)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x^2]}{x^2+2}$, **k)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin(\sqrt{x}+1)$.

2. Obliczyć granice jednostronne funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 i stwierdzić czy istnieje granica funkcji w punkcie x_0 , jeżeli

a) $f(x)=\frac{x}{|x|}$, $x_0=0$, **b)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$, **c)** $f(x)=\frac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0=1$, **d)** $f(x)=\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}+1}$, $x_0=0$, **e)** $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$, $x_0=0$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) 2, **b)** $\frac{10}{12}$, **c)** $\frac{12}{10}$, **d)** n, **e)** 3, **f)** $\frac{7}{5}$, **g)** $\frac{1}{2}$, **h)** e^{-3}, **i)** e , **j)** 1, **k)** 0. **2. a)** $-1, 1$, **b)** $0, +\infty$, **c)** $\frac{1}{2}$, 0, **d)** $0, 0$, **e)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

18. Funkcje ciągłe

Definicja. Funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 jest **ciągła** w punkcie x_0, jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Przykłady.

1) $f(x)=\begin{cases}\frac{tgx}{x} & dla\ x\neq 0\\ 1 & dla\ x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1=f(0)\Rightarrow$ funkcja f jest ciągła w punkcie $x=0$.

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{[x]}{x-1} & dla\ x\neq 1\\ 0 & dla\ x=1\end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{[x]}{x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{[x]}{x-1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{[x]}{x-1}$ nie istnieje $\Rightarrow$ funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x=1$.

Twierdzenie. Suma, różnica, iloczyn, iloraz (tam gdzie jest określony) oraz superpozycja funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie. Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Zadania

1. Wyznaczyć zbiór w którym ciągła jest funkcja:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ dla\, x < 1 \\ 3 - x \ \ dla\, x \geq 1 \end{cases}$, **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 \ \ dla\, x \leq -2 \\ x^2 + 5x + 6 \ \ dla\, x > -2 \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{|x|} \ \ dla\, x \neq 0 \\ 0 \ \ \ \ dla\, x = 0 \end{cases}$, **d)** $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + x^4}}{x} \ \ dla\, x \neq 0 \\ 1 \ \ dla\, x = 0 \end{cases}$,

e) $f(x) = \begin{cases} xctgx \ \ dla\, x \neq k\pi \\ 1 \ \ \ dla\, x = k\pi \end{cases}$, $k \in Z$, **f)** $f(x) = [x] \sin \pi x$.

2. Dobrać parametry $a\,, b$ tak, aby podane funkcje były ciągłe:

a) $f(x) = \begin{cases} -1 \ \ \ \ dla\, x \leq -2 \\ ax + b \ \ \ \ dla - 2 < x < 1 \\ 2 \ \ \ \ dla\, x \geq 1 \end{cases}$, **b)** $f(x) = \begin{cases} x \ \ \ \ dla\, |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b \ \ dla\, |x| > 1 \end{cases}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $R - \{1\}$, **b)** R, **c)** R, **d)** $R - \{0\}$, **e)** $R - \{k\pi, k \in Z - \{0\}\}$, **f)** R. **2. a)** $a = 1, b = 1$, **b)** $a = 1, b = -1$.

19. Pochodna funkcji

Definicja. Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, to granicę $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nazywamy **pochodną funkcji f w punkcie x_0** i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$ lub $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Przykład. $f(x) = x^2 - x, \ x_0 = 0$

$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2 - h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h - 1) = -1.$

Geometrycznie pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest tangensem kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Równanie stycznej ma postać $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Funkcję która ma w punkcie x_0 pochodną nazywamy **funkcją różniczkowalną** w punkcie x_0.

Twierdzenie (warunek konieczny różniczkowalności).

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie.
Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x, to

1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
2) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Twierdzenie. Jeżeli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x i funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $y = f(x)$, to funkcja złożona $f[g(x)]$ jest różniczkowalna w punkcie x i $(f[g(x)])' = f'[g(x)]g'(x)$.

Definicja. Jeżeli funkcja f jest $(n-1)$ – krotnie różniczkowalna w punkcie x_0 i pochodna (n – 1) rzędu ma w punkcie x_0 pochodną, to nazywamy ją **pochodną n – tego rzędu (n – tą pochodną)** funkcji f w punkcie x_0.

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0).$$

Wzory podstawowe:

1) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

2) $(a^x)' = a^x \ln a$, $\quad (e^x)' = e^x$.

3) $(x^a)' = a x^{a-1}$.

4) $(\sin x)' = \cos x$, $\quad (\cos x)' = -\sin x$, $\quad (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad (ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arcctg}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

Zadania

1. Obliczyć pochodną funkcji $f(x)$ w punktach w których ona istnieje, jeżeli

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 1$, **b)** $f(x) = (x^2+1)\cos x$, **c)** $f(x) = \frac{x^4+x+1}{\sin x + x}$, **d)** $f(x) = (3x^2+2x+1)^3$, **e)** $f(x) = \mathrm{tg}(x^3+x+2)$, **f)** $f(x) = \sqrt{e^x + x^2}$, **g)** $f(x) = \sin^2 \sqrt[3]{x}$, **h)** $f(x) = 2^{\ln x}$, **i)** $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$, **j)** $f(x) = \log_2(\ln^2 x)$, **k)** $f(x) = \frac{e^x}{\sin(\cos x)}$, **l)** $f(x) = x^4 \ln x$, **m)** $f(x) = |x^2-1|$, **n)** $f(x) = x|x|$, **o)** $f(x) = |\sin^3 x|$, **p)** $f(x) = x^x$, **q)** $f(x) = x^{\sin x}$, **r)** $f(x) = \sin x^{\ln x}$, **s)** $f(x) = x^2|x|$, **t)** $f(x) = x\mathrm{arctg}x$, **u)** $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

2. Obliczyć pochodne $f'(x), f''(x), f'''(x)$, jeżeli

a) $f(x) = x^5 + 3x^2 - \frac{1}{x}$, **b)** $f(x) = x^2 \ln x$, **c)** $f(x) = e^{x^2}$, **d)** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

3. Wyznaczyć n – tą pochodną funkcji

a) $f(x) = 2^x$, **b)** $f(x) = \ln x$, **c)** $f(x) = \sin x$, **d)** $f(x) = \cos x$, **e)** $f(x) = xe^x$,

f) $f(x) = x\cos x$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $f'(x) = 4x^3 + 6x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$, **b)** $f'(x) = 2x\cos x - (x^2+1)\sin x$,

c) $f'(x) = \frac{(4x^3+1)(\sin x + x) - (x^4+x+1)(\cos x + 1)}{(\sin x + x)^2}$, **d)** $f'(x) = 3(3x^2+2x+1)^2(6x+2)$,

e) $f'(x) = \frac{3x^2+1}{\cos^2(x^3+x+2)}$, **f)** $f'(x) = \frac{e^x+2x}{2\sqrt{e^x+x^2}}$, **g)** $f'(x) = \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$, **h)** $f'(x) = \frac{2^{\ln x}\ln 2}{x}$,

i) $f'(x) = 4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3 \frac{4x}{(x^2+1)^2}$, **j)** $f'(x) = \frac{2}{x\ln 2\ln x}$, **k)** $f'(x) = \frac{e^x[\sin(\cos x) + \cos(\cos x)\sin x]}{(\sin(\cos x))^2}$,

l) $f'(x) = x^3(1 + 4\ln x)$, **m)** $f'(x) = 2x\mathrm{sgn}(x^2-1), x \neq \pm 1$, **n)** $f'(x) = 2|x|$,

o) $f'(x) = 3\sin^2 x\,\mathrm{sgn}(\sin x)$, **p)** $f'(x) = x^x(1+\ln x)$, **q)** $f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$,

r) $f'(x) = \sin x^{\ln x}\left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \operatorname{ctg}x\ln x\right)$, **s)** $f(x) = 3x|x|$, **t)** $f'(x) = \operatorname{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}$, **u)** $f'(x) = 0$. **2. a)** $f'(x) = 5x^4 + 6x + \frac{1}{x^2}, f''(x) = 20x^3 + 6 - \frac{2}{x^3}$, $f'''(x) = 60x^2 + \frac{6}{x^4}$, **b)** $f'(x) = x(1 + 2\ln x), f''(x) = 3 + 2\ln x, f'''(x) = \frac{2}{x}$, **c)** $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = e^{x^2}(2 + 4x^2), f'''(x) = 2xe^{x^2}(6 + 4x^2)$, **d)** $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, f''(x) = \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x}{x^3}$, $f'''(x) = \frac{-x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x}{x^4}$. **3. a)** $f^{(n)}(x) = 2^x\ln^n x$, **b)** $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, **c)** $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, **d)** $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, **e)** $f^{(n)}(x) = e^x(n + x)$, **f)** $f^n(x) = n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

20. Reguła de L'Hospitala

Reguła de L'Hospitala.

Jeżeli

1) funkcje $\frac{f(x)}{g(x)}$ i $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ są określone w pewnym sąsiedztwie punktu x_0,

2) $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0) \vee (\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty)$, 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = g$,

to $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = g$.

Reguła de L'Hospitala prawdziwa jest również dla granic jednostronnych, dla granic w $+\infty$ i w $-\infty$ oraz dla $g = \pm\infty$. Symbole nieoznaczone typu $\infty - \infty, 0\cdot\infty, \infty^0, 1^\infty$ można sprowadzić do symbolu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ i zastosować regułę de L'Hospitala.

Przykład. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Zadania

1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{10}-1}{x^3-1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$, **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$, **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}$, **e)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}$,

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^2)$, **g)** $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$, **h)** $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\pi - x}\right)$, **i)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}$, **j)** $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{tg}x^{\operatorname{tg}x}$,

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$, **l)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, **m)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{\frac{1}{x^2}} - x)$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $\frac{10}{3}$, **b)** $\frac{3}{5}$, **c)** $+\infty$, **d)** 0, **e)** 0, **f)** $+\infty$, **g)** 0, **h)** 0, **i)** 0, **j)** 1, **k)** 1, **l)** 1, **m)** 0.

21. Przedziały monotoniczności funkcji

Twierdzenie. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b) i $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ w tym przedziale, to funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale (a, b).

Przykład. $f(x) = x - \ln x$

$D = (0, +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1) \Rightarrow$ funkcja $f(x) = x - \ln x$ jest malejąca w przedziale $(0,1]$,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1,+\infty) \Rightarrow$ funkcja $f(x) = x - \ln x$ jest rosnąca w przedziale $[1,+\infty)$.

Zadania

1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x) = 3x - x^3$, **b)** $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, **c)** $f(x) = x + \sin x$, **d)** $f(x) = x^2 - \ln x^2$,

e) $f(x) = x - e^x$, **f)** $f(x) = x^2 e^{-x}$, **g)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, **h)** $f(x) = x^x$, i) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) malejąca w $(-\infty,-1], [1,+\infty)$, rosnąca w $[-1,1]$, **b)** malejąca w $[-1,1]$, rosnąca w $(-\infty,-1], [1,+\infty)$, **c)** rosnąca w $(-\infty,+\infty)$, **d)** rosnąca w $[-1,\ 0)$ i $[1,+\infty)$, malejąca w $(-\infty,-1]$ i $(0,1]$. **e)** malejąca w $[0,+\infty)$, rosnąca w $(-\infty,0)$, **f)** malejąca w $(-\infty,0], [2,+\infty)$, rosnąca w $[0,2]$, **g)** malejąca w $(0,1), (1,e]$, rosnąca w $[e,+\infty)$, **h)** malejąca w $(0,\frac{1}{e}]$, rosnąca w $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, **i)** malejąca w $[e,+\infty)$, rosnąca w $(0,e]$.

22. Ekstrema lokalne funkcji

Definicja. Funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli istnieje przedział $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ zawarty w dziedzinie funkcji f taki, że

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)(f(x_0) \geq f(x)).$$

Definicja. Funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum lokalne**, jeżeli istnieje przedział $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ zawarty w dziedzinie funkcji f taki, że

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)(f(x_0) \leq f(x)).$$

Minima i maksima lokalne nazywamy **ekstremami lokalnymi.**

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego.

1) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 i $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ dla $x < x_0$ oraz $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ dla $x > x_0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum (maksimum) lokalne.
2) Jeżeli funkcja f jest $2n -$ krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 i $f'(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ oraz $f^{(2n)}(x_0) > 0$ $(f^{(2n)}(x_0) < 0)$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Przykład. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$,

$D = R$, $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 15x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1,$

$$\begin{array}{ccccccccc} + & -1 & - & 0 & - & 1 & + & f'(x) \\ \hline & & & & & & & x \end{array}$$

w punkcie $x = -1$ funkcja ma maksimum lokalne, $y_{max} = f(-1) = 1,$

w punkcie $x = 0$ funkcja nie ma ekstremum lokalnego,

w punkcie $x = 1$ funkcja ma minimum lokalne, $y_{min} = f(1) = -3.$

Twierdzenie. Każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest ograniczona i osiąga wartość najmniejszą i największą.

Przykład. Wyznaczymy wartość najmniejszą i wartość największą funkcji $f(x) = x^2e^x$ w przedziale $[-1,2]$. Wartości te funkcja osiąga w punktach ekstremalnych leżących wewnątrz przedziału $[-1,2]$ lub na jego końcach.

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0,$

$-2 \notin (-1, 2),$

$f(0) = 0 -$ wartość najmniejsza,

$f(-1) = e^{-1},$

$f(2) = 4e^2 -$ wartość największa.

Zadania

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, **b)** $f(x) = \frac{4+4x+3x^2}{1+x+x^2}$, **c)** $f(x) = x^2 \ln x$, **d)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,

e) $f(x) = x^2 e^{\frac{x^2}{2}}$, **f)** $f(x) = x^2e^{-x}$, **g)** $f(x) = e^x \sin x$, **h)** $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$,

i) $f(x) = x^{2x}$, **j)** $f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

2. Wyznaczyć wartość najmniejszą i wartość największą funkcji:

a) $f(x) = x(32 + x^3)$ w przedziale $[-3,1]$, **b)** $f(x) = xe^{-x}$ w przedziale $[-2,2]$,

c) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ w przedziale $[0,4]$, **d)** $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ w przedziale $[0,1]$,

e) $f(x) = \sin 2x - x$ w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, **f)** $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ w przedziale $[6,8]$,

g) $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$ w zbiorze $\left[e^{-2}, e^{-\frac{1}{2}}\right] \cup \left[e^{\frac{1}{2}}, e^2\right]$.

3. Liczbę 8 przedstawić w postaci sumy $x + y$ tak, aby suma $x^3 + y^3$ była najmniejsza.

4. Znaleźć dodatnią liczbę x taką, żeby suma $x + \frac{1}{x}$ była najmniejsza.

5. Obliczyć długości a, b boków prostokąta o największym polu wpisanego w półokrąg o promieniu R.

6. Obliczyć długość h wysokości stożka o najmniejszej objętości opisanego na kuli o promieniu R.

7. Jaka powinna być długość wysokości stożka o największym polu powierzchni bocznej wpisanego w kulę o promieniu R?

8. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $(1,4)$ odcinającej na dodatnich półosiach układu współrzędnych odcinki, których suma długości jest najmniejsza.

9. Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność $144\,m^3$ i kwadratową podłogę. Koszt $1\,m^2$ blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy kontenera wynosi $20\ zł$, a ścian bocznych - $30\ zł$. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $f_{max}(1) = 0, f_{min}(3) = -28,$ **b)** $f_{max}(0) = 4, f_{min}(-2) = \frac{8}{3},$ **c)** $f_{min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e},$ **d)** $f_{min}(e) = e,$ **e)** $f_{max}(\pm\sqrt{2}) = \frac{2}{e}, f_{min}(0) = 0,$ **f)** $f_{max}(2) = \frac{1}{e^2}, f_{min}(0) = 0,$ **g)** $f_{max}\left(-\frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+(2k-1)\pi}, f_{min}\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}, k \in Z,$ **h)** $f_{max}(k\pi) = (-1)^k + \frac{1}{2}, f_{min}\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{3}{4}, k \in Z,$ **i)** $f_{min}\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}},$ **j)** $f_{max}(1) = e^{-1}, f_{min}(0) = 0.$ **2. a)** $f(-2) = -48, f(1) = 33,$ **b)** $f(2) = \frac{2}{e^2}, f(-2) = 2e^2,$ **c)** $f(0) = 0, f(4) = 8,$ **d)** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}, f(1) = f(0) = 1,$ **e)** $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$ **f)** $f(8) = 6, f(6) = 8,$ **g)** $f(e^{-2}) = f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{5}{2},\ f(e^2) = f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{2}.$ **3.** $x = 4, y = 4$. **4.** $x = 1$. **5.** $a = \sqrt{2}R, b = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$ **6.** $h = 4R.$ **7.** $h = \frac{4}{3}R.$ **8.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1.$ **9.** $6m$ – długość podstawy, $4m$ – długość wysokości.

23. Wklęsłość, wypukłość i punkty przegięcia funkcji

Definicja. Funkcję f nazywamy **wypukłą (wklęsłą)** w przedziale (a, b), jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty wykresu funkcji w tym przedziale leży nie niżej (wyżej) niż wykres funkcji łączący te punkty.

Uwaga. Z definicji wynika, że funkcja liniowa jest jednocześnie wypukła i wklęsła w R.

Warunek konieczny i dostateczny wypukłości i wklęsłości funkcji.

Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale (a, b), to jest wypukła (wklęsła) w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Przykład. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$D = R,\ f'(x) = 3x^2 - 6x,\ f''(x) = 6x - 6,$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \Rightarrow$ funkcja jest wklęsła w przedziale $(-\infty, 1]$,

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \Rightarrow$ funkcja jest wypukła w przedziale $[1, +\infty)$.

Definicja. Jeżeli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ i w przedziale $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ jest wypukła (wklęsła), a w przedziale $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ jest wklęsła, to punkt x_0 nazywamy **punktem przegięcia** funkcji f.

Warunek konieczny
Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 i x_0 jest jej punktem przegięcia, to $f''(x_0) = 0$.
Warunek dostateczny
1) Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 i druga pochodna zmienia znak w punkcie x_0, to x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.
2) Jeżeli funkcja f jest $(2n+1)-$ krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 i $f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ oraz $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, to x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.

Przykład. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$D = R,\ f'(x) = 3x^2 - 6x,\ f''(x) = 6x - 6,$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \wedge f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \Rightarrow x = 1$ jest punktem przegięcia funkcji.

Zadania

1. Wyznaczyć przedziały wypukłości, wklęsłości oraz punkty przegięcia funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$, **b)** $f(x) = (x+1)^4 + e^x$, **c)** $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$,

d) $f(x) = \ln(1 + x^2)$, **e)** $f(x) = e^{-x^2}$, **f)** $f(x) = e^{arctgx}$.

2. Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$, gdzie $x = a$ jest punktem przegięcia funkcji $f(x) = x - \sin 2x$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) wklęsła w $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$, wypukła w $[\frac{5}{3}, +\infty)$, $x = \frac{5}{3} -$ punkt przegięcia, **b)** wypukła w $(-\infty, +\infty)$, **c)** wklęsła w $(-\infty, 1]$, wypukła w $[1, +\infty)$, $x = 1 -$ punkt przegięcia, **d)** wypukła w $[-1, 1]$, wklęsła w $(-\infty, -1]$ i w $[1, +\infty)$, $x = \pm 1 -$ punkty przegięcia, **e)** wklęsła w $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, wypukła w $\left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} -$ punkty przegięcia, **f)** wklęsła w $[\frac{1}{2}, +\infty)$, wypukła w $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $x = \frac{1}{2} -$ punkt przegięcia. **2.** $y = x$.

24. Asymptoty funkcji

Definicja. Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale (a, x_0) $((x_0, b))$ i $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ $(\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty)$, to prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną (prawostronną)** funkcji f.

Definicja. Prostą $x = x_0$ nazywamy **asymptotą pionową obustronną** funkcji f, jeżeli jest asymptotą lewo i prawostronną.

Warunek konieczny. Jeżeli prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową funkcji f, to funkcja f nie jest ciągła punkcie x_0.

Przykład. $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \;\Rightarrow \text{prosta } x = 1 \text{ nie jest asympyotą pionową lewostronną,}$$

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty \;\Rightarrow \text{prosta } x = 1 \text{ jest asympyotą pionową prawostronną.}$$

Definicja. Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale $(-\infty, c)$ ($(d, +\infty)$) i $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - ax - b] = 0$ ($\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - ax - b] = 0$), to prostą $y = ax + b$ nazywamy **asymptotą ukośną lewostronną** (**prawostronną**) funkcji f.

Definicja. Prostą $y = ax + b$ nazywamy **asymptotą ukośną obustronną** funkcji f, jeżeli jest asymptotą lewo i prawostronną.

Warunek konieczny i dostateczny. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną (prawostronną) funkcji f wtedy tylko wtedy, gdy
$a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ ($a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$),
b $= \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$ (b $= \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$.

Przykład. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1,$

b $= \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0,$

Prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną obustronną.

Definicja. Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale $(-\infty, a)$ ($(b, +\infty)$) i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$), to prostą $y = c$ nazywamy **asymptotą poziomą lewostronną** (**prawostronną**) funkcji f.

Definicja. Prostą $y = c$ nazywamy **asymptotą poziomą obustronną** funkcji f, jeżeli jest asymptotą lewo i prawostronną.

Przykład. $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - 1}{x + 3} = 2,$$

Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą obustronną.

Zadania

1. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x+2)^2}$, **b)** $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$, **c)** $f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^4}}{1-x}$, **d)** $f(x) = \frac{x(x+\sin x)}{x+2}$,

e) $f(x) = x\ln(e + \frac{1}{x})$, **f)** $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$, **g)** $f(x) = xe^{\frac{2}{x}} + 1$, **h)** $f(x) = (x+2)e^{\frac{x}{x+2}}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $x = 1, x = -2$ − asymptoty pionowe obustronne, $y = 1$ − asymptota pozioma obustronna, **b)** $x = 2$ − asymptota pionowa obustronna, $y = x + 2$ − asymptota ukośna obustronna, **c)** $x = 1$ − asymptota pionowa obustronna, $y = -\sqrt{3}(x + 1)$ − asymptota pionowa obustronna, **d)** $x = -2$ − asymptota pionowa obustronna, **e)** $x = -\frac{1}{e}$ − asymptota pionowa lewostronna, $y = x + \frac{1}{e}$ − asymptota ukośna obustronna, **f)** $x = 0$ − asymptota pionowa obustronna, $y = x$ − asymptota ukośna obustronna, **g)** $x = 0$ − asymptota pionowa prawostronna, $y = x + 3$ − asymptota ukośna obustronna. **h)** $x = -2$ − asymptota pionowa lewostronna, $y = ex$ − asymptota ukośna obustronna.

25. Przebieg zmienności funkcji

Schemat badania przebiegu zmienności funkcji:

1) dziedzina i miejsca zerowe,
2) granice na końcach przedziałów określoności,
3) przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne,
4) przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia,
5) tabela,
6) wykres.

Przykład. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1. $D = (0, +\infty), f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \left(\frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty \Rightarrow x = 0$ jest as. pionową prawostronną

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow y = 0$ jest as. poziomą prawostronną.

3. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

$0 \quad + \quad e^2 \quad - \quad f'(x)$

$y_{max} = f(e^2) = \frac{2}{e}$

4. $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}(2 - \ln x)}{4x^3} = \frac{\sqrt{x}(-2 - 6 + 3\ln x)}{4x^3} = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{8}{3}}$

$0 \quad - \quad e^{\frac{8}{3}} \quad + \quad f''(x)$

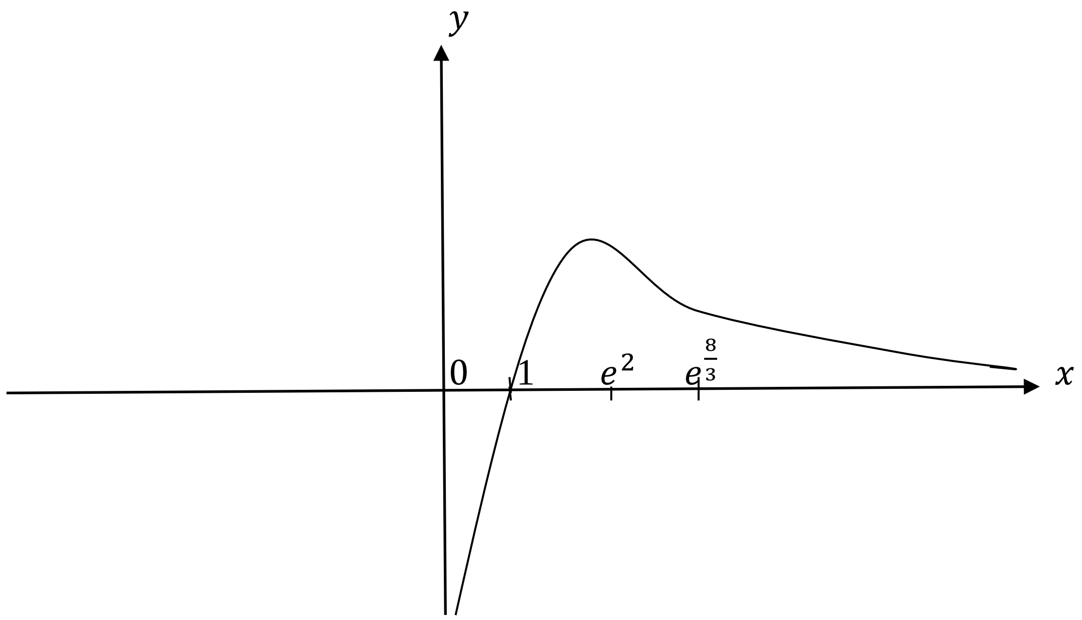
$x = e^{\frac{8}{3}}$ − punkt przegięcia, $f(e^{\frac{8}{3}}) = \frac{8}{3e\sqrt[3]{e}}$

5.

x	$(0, e^2)$	e^2	$\left(e^2, e^{\frac{8}{3}}\right)$	$e^{\frac{8}{3}}$	$(e^{\frac{8}{3}}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

$f(x)$	$-\infty$	Max $\frac{2}{e}$		p.p $\frac{8}{3e\sqrt[3]{e}}$		0

6.



Zadania

1. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

a) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, **b)** $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$, **c)** $f(x)=3-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$, **d)** $f(x)=\frac{e^x}{x}$,

e) $f(x)=x-\ln(x+1)$, **f)** $f(x)=\ln\cos x$, **g)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, **h)** $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$,

i) $f(x)=x^2e^{-x^2}$, **j)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-x$, **k)** $f(x)=\sqrt{\frac{x}{3+x}}$, **l)** $f(x)=x^x$.

26. Całka nieoznaczona

Definicja. Funkcję F nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f w przedziale $[a,b]$, jeżeli $F'(x)=f(x)$ dla każdego $x\in[a,b]$.

Przykład. $f(x)=x-\sin x$, $x\in R$
$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x$, $x\in R$.

Definicja. Całką nieoznaczoną funkcji f w przedziale $[a,b]$ nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f w przedziale $[a,b]$.

$$\int f(x)dx=F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x),\quad C=const.$$

Przykład. $\int(3x^2-\sin x)dx=x^3+\cos x+C$

Sprawdzenie: $(x^3+\cos x+C)'=3x^2-\sin x$.

Wzory podstawowe:

1) $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$ dla $a\neq -1$, $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$,

3) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, $\int e^x dx=e^x+C$,

4) $\int \sin x dx=-\cos x+C$, $\int \cos x dx=\sin x+C$,

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$,

7) $\int \frac{dx}{1+x^2}=arc\,tgx+C$.

Z własności pochodnej funkcji wynikają następujące wzory:

1) $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$,

2) $\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$,

3) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C$,

4) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$.

Twierdzenie. (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli funkcja f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$ i funkcja $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ ma ciągłą pochodną w przedziale $[\alpha,\beta]$, to $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ dla $x=\varphi(t)$.

Przykład.

$$\int x\sin(x^2+3)dx \begin{bmatrix} x^2+3=t \\ 2xdx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2}\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=-\frac{1}{2}\cos(x^2+3)+C.$$

Twierdzenie. (o całkowaniu przez części)

Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne w przedziale $[a,b]$, to

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx.$$

Przykład.

$$\int x\cos x\,dx \begin{bmatrix} u=x, & u'=1 \\ v'=\cos x, & v=\sin x \end{bmatrix} = x\sin x-\int \sin x dx=x\sin x+\cos x+C.$$

Zadania

1. Stosując wzory podstawowe obliczyć całki:

a) $\int \frac{(x^3-1)^2}{x}dx$, **b)** $\int \frac{(x-1)^2}{x\sqrt{x}}dx$, **c)** $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$, **d)** $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{x^3}}{2x\sqrt{x}}dx$,

e) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$, **f)** $\int tg^2 x dx$, **g)** $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$, **h)** $\int 2^x e^x dx$, **i)** $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$.

2. Stosując wzór na całkowanie przez podstawianie obliczyć całki:

a) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^5}$, **b)** $\int \frac{x-2}{\sqrt[3]{x+3}} dx$, **c)** $\int \frac{dx}{-5x+3}$, **d)** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$, **e)** $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^3}}$, **f)** $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$,

g) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$, **h)** $\int \sin^2 x \cos x dx$.

3. Stosując wzór na całkowanie przez części obliczyć całki:

a) $\int xe^x dx$, **b)** $\int x \sin x dx$, **c)** $\int x^2 \cos x dx$, **d)** $\int e^x \cos x dx$, **e)** $\int \ln x dx$,

f) $\int \sin \ln x dx$, **g)** $\int \sin^2 x dx$, **h)** $\int \sin 3x \cos 2x dx$, **i)** $\int x^2 \ln x dx$.

4. Obliczyć całki:

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$, **b)** $\int \frac{dx}{2x^2-5x+3}$, **c)** $\int \frac{(3x-4)dx}{x^2-x-6}$, **d)** $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-6x+9}$, **e)** $\int \frac{(2x^5+6x^3+1)dx}{x^4+3x^3}$,

f) $\int \frac{2x^4-10x^3+21x^2-20x+5}{x^2-3x+2} dx$, **g)** $\int \frac{dx}{4x^2+9}$, **h)** $\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$, **i)** $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^4+3x^2}$, **j)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}}$,

k) $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x+\sqrt[6]{x^5}}$, **l)** $\int \sqrt{\frac{x-2}{x}} \frac{dx}{x}$, **m)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-2x+3}}$, **n)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+8x-4x^2}}$, **o)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+4}}$, **p)** $\int \frac{dx}{\sin x}$,

q) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$, **r)** $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^3 + \ln|x| + c$, **b)** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$, **c)** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + c$, **d)** $3\sqrt[6]{x} + 8\sqrt[4]{x} + c$, **e)** $-\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x + c$, **f)** $\operatorname{tg}x - x + c$, **g)** $\frac{1}{2}(x - \sin x) + c$, **h)** $\frac{2^x e^x}{1+\ln 2} + c$, **i)** $\operatorname{tg}x + c$.

2. a) $-\frac{1}{8(x^2+1)^4} + c$, **b)** $\frac{1}{3}(x+3) - 5\ln\left|\sqrt[3]{x+3}\right| + c$, **c)** $-\frac{1}{5}\ln|3-5x| + c$, **d)** $2\sqrt{x+1} - 2\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right) + c$, **e)** $-\frac{2}{9}\sqrt{1-x^3}(2+x^3) + c$, **f)** $\frac{4}{21}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}(3e^x-4) + c$,

g) $-x + 4\sqrt{x} + 4\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + c$, **h)** $\frac{1}{3}\sin^3 x + c$. **3. a)** $e^x(x-1) + c$, **b)** $-x\cos x - \sin x + c$, **c)** $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$, **d)** $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c$, **e)** $x(\ln x - 1) + c$, **f)** $\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + c$, **g)** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$, **h)** $-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + c$, **i)** $\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + c$. **4. a)** $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) + c$, **b)** $\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x-1}\right| + c$, **c)** $\ln(|x-3|(x+2)^2) + c$, **d)** $2\ln|x-3| - \frac{5}{x-3} + c$, **e)** $x^2 - 6x + \frac{1}{9x} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{27}\ln|x| + \frac{647}{27}\ln|x+3| + c$, **f)** $\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + \ln((x-1)^2|x-2|) + c$, **g)** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}x + c$, **h)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + c$, **i)** $-\frac{1}{x} + \ln\sqrt{x^2+3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$, **j)** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{x} + \frac{3}{4}\ln\left(1+2\sqrt[6]{x}\right) + c$, **k)** $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} +$

$6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)$, **l)** $-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{x^2-2x}\right)+c$, **m)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{16x^2-16x+24}+4x-2\right|+c$, **n)** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2(x-1)}{\sqrt{5}}+c$, o) $\sqrt{x^2-2x+4}+\ln\left|2x-2+2\sqrt{x^2-2x+4}\right|+c$,
p) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$, **q)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right|+c$, **r)** $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(3\mathrm{tg}x)+c$.

27. Całka oznaczona

Definicja. Podziałem przedziału $[a,b]$ nazywamy ciąg przedziałów $([x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n])$, gdzie $x_0=a$ i $x_n=b$.

Definicja. Przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej jednego podziału przedziału $[a,b]$ nazywamy **ciągiem podziałów przedziału** $[a,b]$.

$P_1=([x_{10},x_{11}],[x_{11},x_{12}],...,[x_{1k_1-1},x_{1k_1}])$, $x_{10}=a, x_{1k_1}=b$,

$P_2=([x_{20},x_{21}],[x_{21},x_{22}],...,[x_{2k_2-1},x_{2k_2}])$, $x_{20}=a, x_{2k_2}=b$,

....

$P_n=([x_{n0},x_{n1}],[x_{n1},x_{n2}],...,[x_{nk_{n-1}},x_{nk_n}])$, $x_{n0}=a, x_{nk_n}=b$.

Niech (P_n) będzie dowolnym ciągiem podziałów przedziału $[a,b]$.

Oznaczmy $\Delta x_{ni}=x_{ni}-x_{ni-1}$, $\delta_n=\max\limits_{1\le i\le k_n}\Delta x_{ni}$.

Definicja. Ciąg (P_n) nazywamy **normalnym ciągiem podziałów przedziału** $[a,b]$, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$.

Przykład. $[a,b]=[0,1]$, $P_n=\left([0,\frac{1}{n}],[\frac{1}{n},\frac{2}{n}],...,[\frac{n-1}{n},1]\right)$, $\delta_n=\frac{1}{n}\to 0$.

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale domkniętym $[a,b]$,

(P_n) - normalnym ciągiem podziałów przedziału $[a,b]$.

Definicja. Ciąg $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{k_n}f(\xi_{ni})\Delta x_{ni}$, gdzie $\xi_{ni}\in[x_{ni-1},x_{ni}]$ nazywamy **ciągiem sum całkowych Riemanna.**

Definicja. Jeżeli istnieje granica ciągu sum (σ_n) taka sama dla każdego normalnego ciągu podziałów przedziału $[a,b]$ niezależnie od wyboru punktów ξ_{ni}, to nazywamy ją **całką oznaczoną Riemanna** funkcji f w przedziale $[a,b]$.

O funkcji f mówimy wówczas, że jest całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sigma_n.$$

Jeżeli $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a,b]$, to $\int_a^b f(x)dx$ jest polem obszaru ograniczonego wykresem funkcji f, prostymi $x = a$ i $x = b$ oraz osią $0x$.

Twierdzenie. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale [a,b], to jest całkowalna i
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale $[a,b]$.

Wzór $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ nazywamy **wzorem Newtona - Leibniza**.

Przykład. $\int_2^3 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

Zadania

1. Obliczyć całki:

a) $\int_0^1 \sqrt{x}dx$, **b)** $\int_0^2 \frac{x+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}dx$, **c)** $\int_{-1}^2 (x^4 - 10x^3 + 2x^2 - 20x + 5)dx$, **d)** $\int_{\pi}^{3\pi} \left[\frac{x}{\pi}\right] \sin x dx$,

e) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$, **f)** $\int_1^2 \ln x dx$, **g)** $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$.

2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach:

a) $y = 1 - x^2, y = 0$, **b)** $y = \sin x$, $y = 0, x \in [0,\pi]$, **c)** $4y = 8x - x^2$, $4y = x + 6$,

d) $8y = x^2$, $y^2 = 8x$, **e)** $y = x^3$, $y = x$, $y = 2x$, **f)** $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$,

g) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x$.

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y = x^2 + 1$ i stycznymi do niej w punktach o odciętych $x = 1$ i $x = -1$.

4. Obliczyć pole obszaru $D = \{(x,y) \in R^2;\ |y| \leq x^2 - 2|x| + 1 \wedge -1 \leq x \leq 1\}$.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{5\sqrt{2}}{3} + 1$, **c)** $-39{,}9$, **d)** -6, **e)** $\pi^2 - 4$, **f)** $\ln 4 - 1$, **g)** $\frac{1}{2}$. **2. a)** $\frac{4}{3}$, **b)** 2, **c)** $5\frac{5}{24}$, **d)** $\frac{64}{3}$, **e)** $\frac{3}{2}$, **f)** $114\frac{1}{3}$, **g)** $\frac{27}{2}$. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** $\frac{4}{3}$.

28. Kombinatoryka

Definicja. Permutacją elementów zbioru n-elementowego nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru.
Liczba permutacji zbioru n-elementowego jest równa $n!$.

$$P_n = n!.$$

Przykłady.
1) Ze zbioru cyfr $\{1,2,3,4,5\}$można utworzyć maksymalnie $5!$ liczb pięciocyfrowych, w których żadna cyfra nie powtarza się.
2) Ze zbioru cyfr $\{0,1,2,3,4\}$można utworzyć maksymalnie $4 \cdot 4!$ liczb pięciocyfrowych, w których żadna cyfra nie powtarza się.

Definicja. K-wyrazową wariacją z powtórzeniami elementów zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru.

Liczba **k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami** elementów zbioru n-elementowego jest równa n^k.

$$W_n^k = n^k.$$

Przykłady.
1) Ze zbioru cyfr $\{1,2,3,4,5\}$można utworzyć maksymalnie 5^5 liczb pięciocyfrowych.
2) Ze zbioru cyfr $\{1,2,3,4,5\}$można utworzyć maksymalnie 5^4 liczb czterocyfrowych.

Liczba funkcji przekształcających zbiór k-elementowy w zbiór n-elementowy jest równa liczbie k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami elementów zbioru n-elementowego.

Definicja. K-wyrazową wariacją bez powtórzeń elementów zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów tego zbioru.

Liczba **k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń** elementów zbioru n-elementowego jest równa $\frac{n!}{(n-k)!}$.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Przykład. Ze zbioru cyfr $\{1,2,3,4,5\}$można utworzyć maksymalnie $\frac{5!}{(5-4)!}$ liczb czterocyfrowych, w których żadna cyfra nie powtarza się.

Liczba funkcji różnowartościowych przekształcających zbiór k-elementowy w zbiór n-elementowy jest równa liczbie k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń elementów zbioru n-elementowego.

Definicja. K-elementową kombinacją elementów zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-elementowy podzbiór elementów tego zbioru.

Liczba **k-elementowych kombinacji** elementów zbioru n-elementowego jest równa $\binom{n}{k}$.

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Przykład. Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa:
$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

Zadania

1. Z cyfr 1,2,3,4 zapisanych na czterech kartkach układamy liczby czterocyfrowe. Ile jest liczb **a)** wszystkich, **b)** parzystych, **c)** podzielnych przez 3, **d)** podzielnych przez 4, **e)** większych od 4000?

2. W grupie 12 osób jest 6 kobiet i 6 mężczyzn. Na ile sposobów możemy te osoby ustawić w szereg, jeśli
a) osoby te stoją w dowolny sposób, **b)** na początkowych 6 miejscach stoją kobiety,
c) żadna kobieta nie stoi obok kobiety, **d)** na pierwszym miejscu stoi kobieta, a na ostatnim mężczyzna?

3. Ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5,6,7 , jeśli
a) każda cyfra może występować w liczbie co najwyżej raz, **b)** cyfry mogą się powtarzać?

4. W grupie 12 osób jest 6 kobiet i 6 mężczyzn. Na ile sposobów można:
a) wybrać 2-osobową delegację tej grupy,
b) wybrać 4-osobową żeńską delegację tej grupy,
c) wybrać 4- osobową delegację, w której skład wejdą dwie kobiety i dwóch mężczyzn,
d) wybrać 4-osobową delegację mieszaną,
e) podzielić tę grupę na dwie grupy liczące tyle samo osób?

5. Ile podzbiorów co najmniej 2-elementowych, w których suma elementów jest liczbą nieparzystą zawiera zbiór $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$?

6. Do zbioru A należą wszystkie liczby naturalne 4-cyfrowe, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 2, do zbioru B wszystkie liczby naturalne czterocyfrowe, których reszta z dzielenia przez 5 lub 7 jest równa 1. Który zbiór ma więcej elementów?

7. Dane są zbiory $A = \{1,2,3,4\}$ i $B = \{1,2,3,4,5,6\}$. Ile jest
a) wszystkich funkcji przekształcających zbiór A w zbiór B?
b) wszystkich funkcji różnowartościowych przekształcających zbiór A w zbiór B?
c) wszystkich funkcji rosnących przekształcających zbiór A w zbiór B?

8. Do windy na parterze 10-cio piętrowego bloku wsiada 7 osób. Na ile różnych sposobów osoby te mogą wysiąść z windy?

9. Na ile różnych sposobów można rozmieścić 4 różnokolorowe kule w 10 szufladach
a) w dowolny sposób, **b)** tak, żeby w każdej szufladzie była co najwyżej jedna kula?

10. Na ile różnych sposobów można rozmieścić n kul w n szufladach tak, aby dokładnie jedna szuflada była pusta.

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) 4!, **b)** 3!+3!, **c)** 0, **d)** 3·2!, **e)** 3!. **2. a)** 12!, **b)** 6!· 6!, **c)** 6!· 6!, **d)** $6^2 \cdot 10!$. **3. a)** $\frac{7!}{3!}$, **b)** 7^4. **4. a)** $\binom{12}{2}$, **b)** $\binom{6}{4}$, **c)** $\binom{6}{2}\binom{6}{2}$, **d)** $2\binom{6}{3}\binom{6}{1} + \binom{6}{2}\binom{6}{2}$, **e)** $\binom{12}{6}$. **5)** 124. **6)** $|A| = 3000$, $|B| = 2126$. **7) a)** 6^4, **b)** $\frac{6!}{2!}$, **c)** $\binom{6}{2}$. **8)** 10^7. **9. a)** 10^4, **b)** $\frac{10!}{6!}$. **10.** $n\binom{n}{2}(n-2)!$.

29. Rachunek prawdopodobieństwa

Ω – przestrzeń zdarzeń elementarnych (zdarzenie pewne)

$\emptyset$ –zdarzenie niemożliwe

A_i –zdarzenia (podzbiory Ω) dla $i \in N$

A' –zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

Definicja. Prawdopodobieństwem nazywamy dowolną funkcję określoną na zdarzeniach o wartościach z przedziału $[0,1]$ spełniającą warunki:

1) $P(\Omega) = 1$,
2) Jeżeli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Własności prawdopodobieństwa:

1) $P(\emptyset) = 1$,
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
3) $P(A') = 1 - P(A)$,
4) Jeżeli $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P(A)} \leq \mathrm{P(B)}$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.

Załóżmy, że zbiór zdarzeń elementarnych Ω jest skończony, a zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Definicja. Jeżeli $A \subset \Omega$, to $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Przykład.

$\Omega -$ liczba wyrzuconych oczek przy jednokrotnym rzucie kostką sześcienną,

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$A -$ zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek,

$A = \{2,4,6\}$,

$|\Omega| = 6,\ \ |A| = 3$,

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Definicja. Zdarzenia A i B nazywamy **niezależnymi**, jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Przykład.

$\Omega -$ zbiór wyników otrzymanych przy dwukrotnym rzucie kostką do gry,

$A -$ zdarzenie polegające na wyrzuceniu w pierwszym rzucie liczby oczek nie większej niż 3,

$B -$ zdarzenie polegające na wyrzuceniu w drugim rzucie liczby oczek mniejszej niż 3,

$A \cap B -$ zdarzenie polegające na wyrzuceniu w pierwszym rzucie liczby oczek nie większej niż 3 i w drugim rzucie liczby oczek mniejszej niż 3,

$|\Omega| = 6^2 = 36, |A \cap B| = 6,\ \ P(A \cap B) = \frac{1}{6}$,

$\Omega_1 -$ zbiór wyników otrzymanych w pierwszym rzucie kostką do gry,

$|\Omega_1| = 6,\ \ |A| = 3,\ \ P(A) = \frac{1}{2}$,

$\Omega_2 -$ zbiór wyników otrzymanych w drugim rzucie kostką do gry,

$|\Omega_2| = 6,\ \ |B| = 2,\ \ P(B) = \frac{1}{3}$,

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ zdarzenia A i B są niezależne.

Definicja. Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, gdzie $P(B) > 0$ nazywamy liczbę $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Przykład.

$A -$ zdarzenie polegające na wyrzuceniu w rzucie kostką nieparzystej liczby oczek,

$B -$ zdarzenie polegające na wyrzuceniu w rzucie kostką liczby oczek podzielnej przez 3,

$|\Omega| = 6,\ |A| = 3,\quad |B| = 2,$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},\quad P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite.

Jeżeli

1) $\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_n$,
2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$,
3) $P(A_i) > 0$ dla $i = 1,2,\ldots,n$,

to dla każdego zdarzenia $B \subset \Omega$, zachodzi wzór

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n).$$

Przykład. Jeżeli w urnie I jest k kul białych i n kul czarnych, a w urnie II jest 5 kul białych i 10 kul czarnych, to prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z losowo wybranej urny jest równe

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{k}{k+n}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{15}\cdot\frac{1}{2},$$

gdzie
$B -$ wylosowanie kuli białej z losowo wybranej urny,
$A_1 -$ wylosowanie kuli z I urny,
$A_2 -$ wylosowanie kuli z II urny.

Wzór Bayesa

Jeżeli

1) $\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_n$,
2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$,
3) $P(A_i) > 0$ dla $i = 1,2,\ldots,n$,

to dla każdego $i = 1,2,\ldots,n$ i dla każdego zdarzenia $B \subset \Omega$, zachodzi wzór

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)}.$$

Przykład. Jeżeli w urnie I jest k kul białych i n kul czarnych, a w urnie II jest 5 kul białych i 10 kul czarnych i wylosowaliśmy kulę białą, to prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy ją z drugiej urny jest równe

$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{\frac{5}{15}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{k}{k+n}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{15}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3k}{k+n}+1} = \frac{4k+n}{k+n}$, gdzie

$B -$ wylosowanie kuli białej z losowo wybranej urny,
$A_1 -$ wylosowanie kuli z I urny,
$A_2 -$ wylosowanie kuli z II urny.

Schemat Bernoulli'ego

Schematem Bernoulli'ego nazywamy skończony ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwu możliwych wynikach nazywanych umownie sukcesem i porażką. Doświadczenia takie nazywamy próbami Bernoulli'ego.

Prawdopodobieństwo pojawienia się dokładnie k sukcesów w schemacie n prób Bernoulli'ego z prawdopodobieństwem sukcesu w każdej próbie równym p jest równe

$$P_n^k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Przykład. Prawdopodobieństwo pojawienia się dokładnie 2 szóstek w 5 rzutach kostką do gry jest równe

$$P_5^2 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-2} = \frac{2\cdot 5^4}{6^5}.$$

Definicja. Zmienną losową X nazywamy funkcję określoną na zdarzeniach o wartościach rzeczywistych.

Jeżeli $x_1, \dots, x_n$ są wartościami zmiennej losowej X, a odpowiednio $p_1, \dots, p_n$ są prawdopodobieństwami z jakimi zmienna przyjmuje dane wartości, to

X	x_1	....	x_n
p	p_1	....	p_n

nazywamy **rozkładem zmiennej losowej** X.

Przykład. $X -$ liczba wyrzuconych oczek w jednokrotnym rzucie kostką do gry,

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Definicja. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Przykład. $X -$ liczba wyrzuconych oczek w jednokrotnym rzucie kostką do gry,

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Definicja. Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$D^2(X) = E((X - E(X))^2 = E(X^2) - E^2(X).$

Przykład. $X -$ liczba wyrzuconych oczek w jednokrotnym rzucie kostką do gry,

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X^2	1	4	9	16	25	36
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{6} - \left(\sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{6}.$$

Definicja. Odchyleniem standardowym zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\sigma_X = \sqrt{D^2(X)}.$$

Przykład. $X -$ liczba wyrzuconych oczek w jednokrotnym rzucie kostką do gry,

$$\sigma_X = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{\frac{13}{6}}.$$

Zadania

1. Jan i Piotr chodzą na wykład z matematyki. Jan chodzi na co drugi wykład, Piotr opuszcza 10% wykładów, natomiast na 45% wykładów są obecni obaj. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

a) choć jeden z nich jest na wykładzie,

b) dokładnie jeden z nich jest na wykładzie,

c) żaden z nich nie jest na wykładzie.

2. Losujemy kartę z talii 52 kart. Czy niezależne są zdarzenia A i B, jeżeli

a) $A -$ wylosowanie asa i $B -$ wylosowanie karty czerwonej,

b) $A -$ wylosowanie pika i $B -$ wylosowanie czarnego asa,

c) $A -$ wylosowanie asa i $B -$ wylosowanie karty czerwonej.

3. $P(A \cup B) = \frac{3}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{2}, P(A \backslash B) = P(B \backslash A)$. Obliczyć $P(A),\ P(B), P(A \backslash B)$.

4. Zdarzenia A i B są niezależne i jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwo zajścia przynajmniej jednego ze zdarzeń A i B jest równe $\frac{1}{2}$. Obliczyć $P(A)$.

5. $P(A) = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{7}{8}, A \cap B = \emptyset$. Obliczyć $P(A' \cup B)$.

6. Wykazać, że $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

7. Wykazać, że jeżeli $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

8. Wykazać, że jeżeli $P(A) = 0{,}85, P(B) = 0{,}75,$ to $P(A|B) \geq 0{,}8$.

9. Wykazać, że jeżeli $P(A \cup B) = 1$ i zdarzenia A i B są niezależne, to $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

10. Ze zbioru $Z = \{1,2,\dots,11,12\}$ losujemy jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie – wylosowana liczba jest mniejsza niż 7, a B – wylosowana liczba jest podzielna przez 4.
Czy zdarzenia A i B są **a)** niezależne, **b)** przeciwne, **c)** wykluczają się?

11. Rzucamy 4 razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia za każdym razem innej liczby oczek.

12. Rzucamy 5 razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej raz 5 lub 6 oczek.

13. W urnie jest 10 kul białych i 5 czarnych. Losujemy kolejno bez zwracania 2 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy **a)** dwie kule białe, **b)** dwie kule różnych kolorów, **c)** za drugim razem kulę białą?

14. Ze zbioru $Z = \{1,2, \dots, 9\}$ losujemy kolejno bez zwracania 3 liczby. Obliczyć prawdopodobieństwo, że **a)** wszystkie wylosowane liczby będą parzyste, **b)** liczba wylosowana za drugim razem będzie parzysta, **c)** trzecią liczbą będzie 2?

15. Ktoś rzucił 3 razy monetą i poinformował nas, że wypadła nieparzysta liczba orłów. Jaka jest szansa, że wypadły 3 orły?

16. Losujemy jedną rodzinę spośród rodzin z dwojgiem dzieci. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiadomo, ż w tej rodzinie jest przynajmniej jeden chłopiec?

17. W pierwszej urnie są 2 kule białe i 6 czarnych, w drugiej 6 białych i 3 czarne. Rzucamy kostką do gry, jeśli wypadnie liczba oczek mniejsza niż 3, to losujemy kulę z pierwszej urny, w pozostałych przypadkach losujemy kulę z drugiej urny.
a) Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.
b) Wylosowano kulę białą, jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucono wcześniej mniej niż 3 oczka?

18. Urna I zawiera 1 kulę białą i jedną czarną, urna II zawiera 2 kule białe i 3 czarne. Z urny I do urny II przełożono losowo jedną kulę a następnie z urny II wylosowano jedną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że **a)** obie kule były tego samego koloru, **b)** z urny II wylosowano kulę białą.
19. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie dwóch szóstek w czterech rzutach kostką.

20. Prawdopodobieństwo trafienia w dziesiątkę przy jednym strzale jest równe $\frac{1}{3}$. Ile należy oddać strzałów, aby z prawdopodobieństwem większym od 0,9 trafić w dziesiątkę co najmniej raz?

21. Rzucono 10 razy kostką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie wyrzucono 6, jeżeli wiadomo, że wyrzucono trzy razy 6?

22. Pogotowie ratunkowe dysponuje trzema karetkami. Prawdopodobieństwo, że w godzinach 8.00 – 9.00 samochód będzie w bazie jest równe 0,2 dla każdego samochodu.
a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że w danym czasie co najmniej jeden samochód będzie w bazie.
b) Jaką liczbą samochodów powinno dysponować pogotowie, aby prawdopodobieństwo tego, że w danym czasie w bazie będzie co najmniej jeden samochód było większe niż 0,95?

23. Paradoks kawalera de Méré. Co jest bardziej prawdopodobne: otrzymanie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kostek, czy co najmniej raz dwóch jedynek na obu kostkach przy 24 rzutach dwóch kostek?

24. Zadanie Samuela Pepysa (zadane Newtonowi) Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie co najmniej jednej 6 w 6 rzutach, co najmniej dwu 6 w 12 rzutach, czy co najmniej trzech 6 w 18 rzutach?

25. Jaka jest szansa, że na balu spotkam osobę, obchodzącą urodziny tego samego dni, co ja? Ile powinno być osób, żeby szansa przekroczyła 0,5?

26. Rzucamy dwa razy monetą. Zmienna losowa jest różnicą liczby orłów i reszek. Wyznaczyć rozkład, wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

27. Rzucamy kostką. Gdy wypadnie parzysta liczba oczek, wygrywamy 2 zł, gdy wypadnie nieparzysta większa od 1 – przegrywamy 4 zł, a gdy wypadnie 1, to nic nie wygrywamy i nic nie przegrywamy. Wyznaczyć rozkład wygranych, wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

28. Rzucamy symetryczną monetą do momentu wyrzucenia orła lub trzech reszek. Zmienna losowa jest liczbą wykonanych rzutów. Wyznaczyć rozkład, wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

29. Rozpatrujemy następującą grę: losujemy jedną kartę z talii 52 kart i wygrywamy 5 zł jeżeli jest to as, wygrywamy 2 zł jeżeli jest to król, dama lub walet, przegrywamy 1 zł w pozostałych przypadkach. Czy jest to gra sprawiedliwa?

30. Rzucamy dwoma symetrycznymi monetami i wygrywamy tyle zł ile orłów wyrzucimy. Jeżeli wyrzucimy dwie reszki płacimy x zł. Ile powinien wynosić x, żeby gra była sprawiedliwa?

Wskazówki i odpowiedzi:

1. a) 0,95, **b)** 0,5, **c)** 0,05. **2. a)** tak, **b)** tak, **c)** nie. **3.** Wsk. $P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) + P(A \cap B)$, $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$, $P(A) = P(B) = \frac{5}{8}$, $P(A \backslash B) = \frac{1}{8}$. **4.** $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** $\frac{7}{8}$. **7.** Wsk. $B = A \cup (B - A)$. **10. a)** nie, **b)** nie, **c)** nie. **11.** $\frac{15}{6^4}$. **12.** $1 - (\frac{5}{6})^{10}$. **13. a)** $\frac{9}{21}$, **b)** $\frac{10}{21}$, **c)** $\frac{19}{21}$. **14. a)** $\frac{1}{21}$, **b)** $\frac{4}{9}$, **c)** $\frac{1}{9}$. **15.** $\frac{1}{4}$. **16.** $\frac{1}{3}$. **17. a)** $\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{4}$. **18. a)** $\frac{7}{12}$, **b)** $\frac{5}{12}$. **19.** $\frac{25}{216}$. **20.** co najmniej 6. **21.** $\frac{3}{10}$. **22. a)** 0,488, **b)** co najmniej czterema. **23.** $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177 -$ p – stwo wyrzucenia jednej 1 w 4 rzutach, $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914 -$ p – stwo wyrzucenia dwóch 1 w 24 rzutach. **24.** $1 - \frac{5^6}{6^6} \approx 0{,}665 -$ p – stwo wyrzucenia jednej 6 w 6 rzutach, $1 - \left(\frac{5^{12}}{6^{12}} + 12\frac{5^{11}}{6^{12}}\right) \approx 0{,}619 -$ p – stwo wyrzucenia dwu 6 w 12 rzutach, $1 - \left(\frac{5^{18}}{6^{18}} + 18\frac{5^{17}}{6^{18}} + 153\frac{5^{16}}{6^{18}}\right) \approx 0{,}597 -$ p – stwo wyrzucenia trzech 6 w 18 rzutach. **25.** $1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n$, gdzie $n -$ liczba osób, $p > 0{,}5$ dla $n \geq 253$. **26.** $P(X = -4) = \frac{1}{3}, P(X = 0) = \frac{1}{6}, P(X = 2) = \frac{1}{2}, E(X) = -\frac{1}{3}, D^2(X) = \frac{23}{3}$.
27. $P(X = -2) = 0{,}25, P(X = 0) = 0{,}5, P(X = 2) = 0{,}25, E(X) = 0, D^2(X) = 2$.
28. $P(X = 1) = 0{,}5, P(X = 2) = 0{,}25, P(X = 3) = 0{,}25, E(X) = 1{,}75, D^2(X) = 2{,}5$.
29. $P(X = 5) = \frac{4}{52}, P(X = 2) = \frac{12}{52}, P(X = -1) = \frac{36}{52}, E(X) = \frac{8}{52} \neq 0 -$ gra nie jest sprawiedliwa. **30.** $x = -4$.

30. Liczby zespolone

Definicja. Zbiór wszystkich par (x, y) liczb rzeczywistych nazywamy **zbiorem liczb zespolonych** i oznaczamy symbolem C.

Działania w C:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$.

Liczby zespolone postaci $(x,0)$ mają takie same własności jak liczby rzeczywiste. W dalszym ciągu będziemy je utożsamiać z liczbami rzeczywistymi.

Przyjmując oznaczenie $(x,0) = x$ możemy napisać, że $R \subset C$.

Definicja. Liczbę zespoloną $(-x,-y)$ nazywamy **liczbą przeciwną** do liczby zespolonej (x, y).

Definicja. Liczbę zespoloną $(x,-y)$ nazywamy **liczbą sprzężoną** z liczbą zespoloną (x, y) i oznaczamy $\bar{z}$.

Definicja. Liczbę zespoloną $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ nazywamy **liczbą odwrotną** do liczby zespolonej $(x, y) \neq (0,0)$.

Definicja. Liczbę rzeczywistą nieujemną równą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy **modułem** liczby zespolonej (x, y) i oznaczamy $|z|$.

Posługiwanie się liczbami zespolonymi w postaci par liczb rzeczywistych jest praktycznie bardzo niewygodne. Wygodniej jest posługiwać się liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej (kanonicznej).

Oznaczmy: $(0,1) = i$.

Wówczas $z = (x, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy$.

Postać $z = (x, y) = x + iy$ nazywamy **postacią algebraiczną liczby zespolonej** z.

$x -$ część rzeczywista, $rez = x$,

$y -$ część urojona, $imz = y$.

Zauważmy, że $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$.

Oznacza to, że istnieje liczba zespolona, której kwadrat jest równy -1. Zatem liczby zespolone mają własność, której nie mają liczby rzeczywiste.

Uwaga. Działania na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy jak działania na wyrażeniach algebraicznych z założeniem, że $i^2 = 1$.

Przykłady.

1) $(2 - i) + (3 + 4i) = 5 + 3i$
2) $(2 - i) - (3 + 4i) = -1 - 5i$
3) $(2 - i)(3 + 4i) = 6 + 8i - 3i - 4i^2 = 6 + 8i - 3i + 4 = 10 + 5i$
4) $\frac{2-i}{3+4i} = \frac{(2-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{10+5i}{9+16} = \frac{10}{25} + \frac{5}{25}i = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

Definicja. Argumentem liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy liczbę rzeczywistą φ taką, że $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$ i $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$.

$\arg z = \varphi$,

$\arg z \in [0,2\pi)$ nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy $Argz$.

$$\arg z = Argz + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Przykład.

$z = 1 - i$

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{7}{4}\pi$$

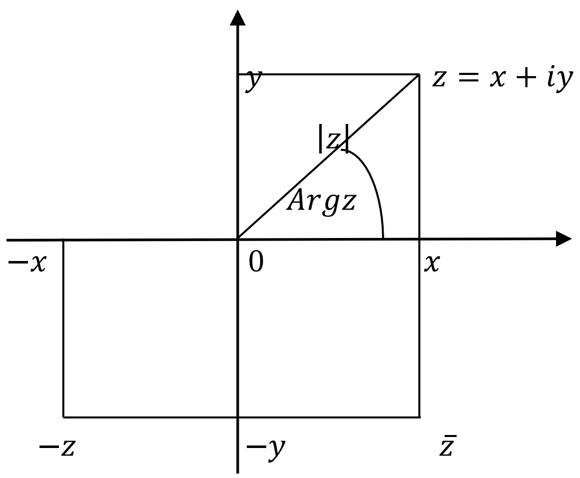
Zauważmy, że $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Przykład.

$z = 1 - i$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

Definicja. Postać $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazywamy postacią trygonometryczną liczby zespolonej z.



Własności liczb zespolonych

1. $\bar{\bar{z}} = z$.

2. $z\bar{z} = |z|^2$.

3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

4. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

5. Jeżeli $z_2 \neq 0$, to $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

6. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

7. Jeżeli $z_2 \neq 0$, to $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

9. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

10. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

11. Jeżeli $z_2 \neq 0$, to $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

12. $\arg z^n = n \arg z$.

Dowód 4.

$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$,

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)|^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Dowód 8.

a) jeśli $z_1 + z_2 = 0$, to nierówność jest oczywista,
b) $z_1 + z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1+z_2}{z_1+z_2} = \frac{z_1}{z_1+z_2} + \frac{z_2}{z_1+z_2} = 1$$

z tego, że $re z \leq |z|$ wynika, że

$$1 = re\frac{z_1}{z_1+z_2} + re\frac{z_2}{z_1+z_2} \leq \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|},$$

$$1 \leq \frac{|z_1|+|z_2|}{|z_1+z_2|} \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Dowód 10.

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1 z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

$$\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Definicja. Jeżeli $\varphi = \arg z$, to postać $z = |z|e^{i\varphi}$ nazywamy postacią wykładniczą liczby zespolonej z.

Uwaga. Z tego, że $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $z = |z|e^{i\varphi}$ wynika, że $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Przykład.

$z = 1 - i, \quad z = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$

Wzór Moivre'a
$\forall \varphi \in R \forall k \in Z\ ((\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi)$.

Dowód.

a) $k \in N$
$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

$\arg z^n = \arg z + ... + \arg z = n\arg z$,

$z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.
b) $k = 0$ - równość oczywista.
c) $k = -n$
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi = \cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi.$

Z tego, że $|z^n| = |z|^n$ i ze wzoru Moivre'a wynika, że jeśli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ dla każdego $n \in Z$.

Przykład.
$(1+i)^6 = \sqrt{2}^6(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^6 = 8(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi) = -8i$.

Definicja. Liczbę zespoloną w spełniającą równanie $w^n = z$ nazywamy pierwiastkiem $n-$tego stopnia liczby zespolonej z.

$$\sqrt[n]{z} = w.$$

Twierdzenie. Każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma n różnych pierwiastków $n-$tego stopnia.
Jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0,1,...,n-1.$$

Dowód.

Niech $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$, wówczas z definicji pierwiastka wynika, że

$$|w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ponieważ $|w|^n = |z|$, więc

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Zatem $n\theta = \varphi + 2k\pi$.

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in Z.$$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k \in Z.$$

Zauważmy, że $w_0 = w_n = w_{-n}, w_1 = w_{n+1} = w_{-(n+1)}, \ldots$.
Zatem istotnie różnych jest tylko n pierwiastków. Stąd

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0,1,...,n-1.$$

Przykłady.

1) $\sqrt[4]{1}$

$z=1, \quad |z|=1, \quad \varphi=0$

$w_0=\cos 0+i\sin 0=1,$

$w_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$

$w_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$

$w_3=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=-i.$

2) $\sqrt[3]{-1+i}$

$$z=-1+i, \qquad |z|=\sqrt{2}, \qquad \varphi=\frac{3}{4}\pi$$

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{i}{\sqrt[3]{2}},$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{11}{12}\pi+\sin\tfrac{11}{12}\pi),$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}(\cos\tfrac{19}{12}\pi+\sin\tfrac{19}{12}\pi).$$

Uwaga. Pierwiastki zespolone $n-$tego stopnia liczby zespolonej $z\neq 0$ są wierzchołkami $n-$kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$.

Twierdzenie. (zasadnicze twierdzenie algebry, Gauss, 1799)

Każdy wielomian niezerowego stopnia ma w zbiorze liczb zespolonych pierwiastek.

Przykład.

$W(x)=x^2+2x+2$

$\Delta=-4, \qquad \sqrt{\Delta}=2i$

$x_1=\frac{-2-2i}{2}=-1-i,\ x_2=\frac{-2+2i}{2}=-1+i.$

Twierdzenie. Jeżeli liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych , to liczba $\bar{z}$ jest również pierwiastkiem tego wielomianu.

Zadania

1. Przedstawiając liczby zespolone jako wektory na płaszczyźnie podać interpretację sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu dwóch liczb zespolonych.

2. Obliczyć:

a) $(2+i)+(2-i)$, **b)** $(3-i)-(2-3i)$, **c)** $(2-i)(2+i)$, **d)** $\frac{1+2i}{1-2i}$,

e) $(1-i)(2-i\sqrt{3})$, **f)** $(1+3i)^2$, **g)** $\frac{3}{2-5i}$, **h)** $\frac{(\sqrt{3}+i)(-1-\sqrt{3})}{1+i}$, **i)** $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^2$.

3. Obliczyć część rzeczywistą i część urojoną liczby zespolonej

a) $z=(2-i)(3+i)$, **b)** $z=\frac{1}{1-2i}$, **c)** $z=(1+i)^3$, **d)** $w=5z^2+2iz$, dla $z=x+iy$,

e) $w = \bar{z}(3 + iz)$, dla $z = x + iy$, **f)** $w = \frac{rez}{z}$, dla $z = x + iy$, **g)** $w = \frac{z-i}{z+i}$, dla $z = x + iy$.

4. Przedstawić w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczby zespolone:

a) 1, **b)** i, **c)** $1 - i$, **d)** $1 + i$, **e)** $1 - \sqrt{3}i$, **f)** $-1 + i$, **g)** $-1 - \sqrt{3}i$, **h)** $-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$,

i) $3 + 4i$.

5. Przedstawić przy pomocy $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$

a) $\cos 3\varphi$, **b)** $\sin 3\varphi$, **c)** $\cos 4\varphi$, **d)** $\sin 4\varphi$, **e)** $\cos 5\varphi$, **f)** $\sin 5\varphi$, **g)** $\cos 6\varphi$, **h)** $\sin 6\varphi$.

6. Obliczyć:

a) $(1 + i)^4$, **b)** $(1 - i)^5$, **c)** $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$, **d)** $\frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1-i)^{20}}$, **e)** $\frac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$, **f)** $\left(1 + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$.

7. Obliczyć $z_1^n + z_2^n$, jeżeli $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Obliczyć:

a) $\sqrt[3]{1}$, **b)** $\sqrt[4]{i}$, **c)** $\sqrt[4]{-16}$, **d)** $\sqrt[3]{1 - i}$, **e)** $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$, **f)** $\sqrt{3 + 4i}$, **g)** $\sqrt{-7 + 24i}$.

9. Rozwiązać równania:

a) $|z| - z = 1 + 2i$, **b)** $|z| + z = 2 + i$, **c)** $z\bar{z} + z - \bar{z} = 3 + 2i$, **d)** $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$, **e)** $z^4 - 1 = 0$, **f)** $z^5 - 1 = 0$, **g)** $z^4 - i = 0$, **h)** $z^4 + 1 + i = 0$, **i)** $z^2 + 4 = 0$, **j)** $z^2 + 2i = 0$, **k)** $z^2 - 4z + 13 = 0$, **l)** $z^2 + 2iz + 3 = 0$, **m)** $z^2 + 2z + i = 0$, **n)** $z^2 + (2 + 2i)z + (1 + 2i) = 0$, **o)** $z^2 + 2iz - 5 = 0$, **p)** $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$, **q)** $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$, **r)** $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.

10. Podać interpretację geometryczną następujących zbiorów liczb zespolonych:

a) $\{z \in C: |z| \leq 5\}$, **b)** $\{z \in C: |z - i + 1| \leq 1\}$, **c)** $\{z \in C: |z - i| > 2\}$,

d) $\{z \in C: 0 \leq reiz, 1\}$, **e)** $\{z \in C: 0 < \arg\frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}\}$, **f)** $\{z \in C: |z| + rez \leq 1\}$,

g) $\{z \in C: |z - 2| < |z|\}$, **h)** $\{z \in C: |z - 1| \geq 2|z - i|\}$, **i)** $\{z \in C: im\frac{1}{z} \leq 2\}$, **j)** $\{z \in C: \frac{z(z-i)}{z+i} > 0\}$, **k)** $\{z \in C: \frac{2z}{1+z^2} < 1\}$, **l)** $\{z \in C: rez = 5\}$, **m)** $\{z \in C: rez^2 = 4\}$, **n)** $\{z \in C: imz^2 = 2\}$, **o)** $\{z \in C: \arg z = \frac{\pi}{4}\}$, **p)** $\{z \in C: re\frac{1}{z} = 2\}$, **q)** $\{z \in C: \arg\frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{4}\}$, **r)** $\{z \in C: |z^2| = 1\}$, **s)** $\{z \in C: |z + 1| + |z - 2| = 5\}$, **c)** $\{z \in C: -\frac{\pi}{2} \leq \arg\bar{z} \leq \frac{\pi}{4}\}$.

11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 prawdziwa jest równość

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Podać interpretację geometryczną tej nierówności.

Wskazówki i odpowiedzi:

2. a) 4, **b)** $1 + 2i$, **c)** 5, **d)** $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, **e)** $\left(2 + \sqrt{3}\right)(1 - i)$, **f)** $-8 + 6i$, **g)** $\frac{6}{29} + \frac{15}{29}i$, **h)** $-2 - \sqrt{3} + i$, **i)** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **3. a)** $rez = 7, imz = -1$, **b)** $rez = \frac{1}{5}, imz = \frac{2}{5}$, **c)** $rez = -2, imz = 2$, **d)** $rew = 5x^2 - 5y^2 - 2y, imw = 10xy + 2x$, **e)** $rew = 3x, imw = y^2 - x^2 - 3y$, **f)** $rew = \frac{x^2}{x^2+y^2}, imw = -\frac{xy}{x^2+y^2}$, **g)** $rew = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}, imw = -\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}$. **4. a)** $\cos 0 +$

$i\sin 0$, e^0, **b)** $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, **c)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$, **d)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, **e)** $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$, **f)** $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$, **g)** $2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$, $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$, **h)** $5\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $5e^{i\frac{2\pi}{3}}$, **i)** $5\left(\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$, $5e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{4}{3}}$. **5. a)** $\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$, **b)** $\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^2\varphi$,
c) $\cos 4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi$, **d)** $\sin 4\varphi=4\cos^3\varphi\sin\varphi-4\sin^3\varphi\cos\varphi$,
e) $\cos 5\varphi=2+\cos\varphi+\cos^3\varphi+2\cos^4\varphi+\cos^5\varphi$, **f)** $\sin 5\varphi=\sin\varphi-\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$,
g) $\cos 6\varphi=16\cos^6\varphi-\sin^6\varphi-45\cos^4\varphi+15\cos^2\varphi$,
h) $\sin 6\varphi=6-12\cos^2\varphi\sin^2\varphi-20\cos^3\varphi\sin^3\varphi$. **6. a)** -4, **b)** $-4+4i$, **c)** $2^9(1-\sqrt{3})$,
d) -2^5, **e)** -2^5, f) $(26+15\sqrt{3})i$, wsk. $\arg\left(1+\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\frac{\pi}{12}$. **7.** $2(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}$.

8. a) $w_0=1$, $w_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, **b)** $w_0=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$,
$w_1=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$, $w_2=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, $w_3=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$, **c)** $w_0=2\sqrt{2}(1+i)$, $w_1=2\sqrt{2}(-1+i)$, $w_2=2\sqrt{2}(-1-i)$, $w_3=2\sqrt{2}(1-i)$,
d) $w_0=\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$, $w_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(-1-i)$, $w_2=\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$, **e)** $w_0=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{18}-i\sin\frac{\pi}{18})$, $w_1=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18})$, $w_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{23\pi}{18}+i\sin\frac{23\pi}{18})$, **f)** $w_0=(2+i)$, $w_1=(-2-i)$, **g)** $w_0=(3+4i)$, $w_1=(-3-4i)$,
9. a) $z=\frac{3}{2}-2i$, **b)** $z=\frac{3}{4}+i$, **c)** $z=\pm\sqrt{2}+i$, **d)** $z=1+\frac{3}{2}i$, **e)** $z=\pm1$, $z=\pm i$,
f) $z=1$, $z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$, $z=\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi$, $z=\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi$,
$z=\cos\frac{8}{5}\pi+i\sin\frac{8}{5}\pi$, **g)** $z=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, $z=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$,
$z=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, $z=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$, **h)** $z=\cos\frac{5}{16}\pi+i\sin\frac{5}{16}\pi$,
$z=\cos\frac{13}{16}\pi+i\sin\frac{13}{16}\pi$, $z=\cos\frac{21}{16}\pi+i\sin\frac{21}{16}\pi$, $z=\cos\frac{29}{16}\pi+i\sin\frac{29}{16}\pi$, **i)** $z=\pm2i$,
j) $z=-1+i$, $z=1-i$, **k)** $z=2-3i$, $z=2+3i$, **l)** z$=-3i$, $z=i$, **m)** $z=-1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $z=-1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, **n)** $z=-1$, $z=-1+2i$, **o)** $z=-2-i$, $z=2-i$,
p) $z=1+i$, $z=1+2i$, **q)** $z=-2-i$, $z=3+2i$, **r)** $z=\pm2$, $z=\pm i$.